

UNIVERSIDAD DE CANTABRIA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA
Y CIENCIAS DE LA COMPUTACIÓN



TESIS DOCTORAL

**SEGURIDAD, FIABILIDAD Y
ANÁLISIS DE SENSIBILIDAD
EN OBRAS DE INGENIERÍA CIVIL
MEDIANTE TÉCNICAS DE
OPTIMIZACIÓN POR DESCOMPOSICIÓN.
APLICACIONES.**

ROBERTO MÍNGUEZ SOLANA
SANTANDER, 2003

TESIS DOCTORAL

para la obtención del título de
Doctor Ingeniero de Caminos, Canales y Puertos

SEGURIDAD, FIABILIDAD Y ANÁLISIS DE SENSIBILIDAD EN OBRAS DE INGENIERÍA CIVIL MEDIANTE TÉCNICAS DE OPTIMIZACIÓN POR DESCOMPOSICIÓN. APLICACIONES.

Realizada por:

Roberto Mínguez Solana

Bajo la dirección de:

Dr. Enrique Castillo Ron

Presentada en:

Departamento de Matemática Aplicada
y Ciencias de la Computación
de la
Universidad de Cantabria

Santander, 2003

A mi tía Luisa y a mi abuela María

Agradecimientos

Muchas son las personas y entidades que han hecho posible la realización de este trabajo, tanto a nivel personal y humano, como a nivel académico, logístico y financiero.

A nivel personal mi más profundo agradecimiento a mi tía Luisa y a mi abuela María, que ya no están entre nosotros y que han sido, son y serán mis ángeles de la guarda. A ellas va dedicado especialmente todo el trabajo recopilado en estas páginas. Gracias a su apoyo y ayuda me formé como persona permitiéndome disfrutar y disponer de un sin fin de posibilidades para elegir que nunca tuvieron ellas. Por supuesto, no quiero olvidarme de mis padres, Claudio y Carmen, ni de mi hermana, Yolanda, que me han apoyado, sufrido y padecido con paciencia. Ni de mi novia, Susana que sin duda ha sido la más perjudicada en los últimos años, cuántos sábados, domingos y festivos trabajando, muchas gracias por tu paciencia. Tampoco quiero olvidarme de amigos como David, Emiliano, Luis Ángel, Alfredo, Pablo, Jose María, Miguel Ángel, Rosa Eva, Cristina, Antonio, Andrés, Akemi, Jose Manuel, y otros muchos que contribuyeron a que el trabajo no pareciera tanto ‘trabajo’ y fuera más ameno y llevadero.

A nivel personal y académico me gustaría agradecer a mi maestro, Enrique Castillo, su apoyo incondicional y el haberme introducido en el mundo investigador, sin duda que sin su ayuda esta tesis estaría llena de hojas blancas sin sentido. Y a Antonio Conejo, que abrió ante mis ojos el mundo de la descomposición, y que me ha permitido trabajar y aprender codo con codo.

A nivel institucional, mi agradecimiento al Departamento de Matemática Aplicada de la Universidad de Cantabria, por los medios y facilidades puestas a mi disposición y especialmente a la Escuela de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos de la Universidad de Castilla-La Mancha por la oportunidad que me brindaron de introducirme en el mundo docente e investigador y sin cuya financiación no habría sido posible realizar esta tesis.

A todos ellos, **muchas gracias**.

Prefacio

La fiabilidad estructural es una de las disciplinas que más ha evolucionado en los últimos años. Desde la creación de la ingeniería civil como disciplina que se encarga del diseño y ejecución que obras civiles se ha tratado de que éstas fueran lo más seguras posible. La forma de medir cuál es el grado de seguridad de una estructura ha evolucionado mucho en el transcurso del tiempo, existiendo disputas entre los ingenieros clásicos y los defensores de la probabilidad, que hoy están casi zanjadas. No obstante, la dirección a seguir es todavía impredecible.

La comunidad científica internacional ya no pone en duda que todas las acciones y variables controladas por los proyectistas para el diseño estructural se pueden considerar aleatorias, ya que no hay certidumbre total en el conocimiento de su magnitud es exacta. Esto incluye dimensiones de la obra a realizar, resistencias, acciones, errores de proyecto y ejecución, mantenimiento, etc. Todos los esfuerzos de los últimos años, tanto tecnológicos como científicos, han ido encaminados a reducir esa incertidumbre con: (a) el avance de las técnicas constructivas, (b) la mejora de los modelos de comportamiento estructural, físico y de procesos, (c) la mejora de la calidad de los materiales, (d) la obligatoriedad del control de calidad de la ejecución, etc. No obstante, al proyectista le resulta difícil e incomodo trabajar con variables aleatorias. Por todo ello se trata de facilitar el tratamiento probabilista, utilizando códigos basados en la experiencia acumulada durante muchos años de profesión que son elaborados por comités científicos. Así, el proyectista puede realizar su labor tomando unos valores representativos de las acciones, resistencias, etc. sin preocuparse de si, desde un punto de vista estadístico, las hipótesis son razonables, ya que se supone que este problema se ha resuelto previamente en la elaboración de los códigos.

Es así como surge una nueva forma de trabajo en la que se tratan de aplicar todos los conocimientos estructurales pero considerando a las variables no como deterministas sino como aleatorias, con el consiguiente tratamiento estadístico del problema. Mucho se ha avanzado en este campo, hasta el punto de que ya se está en condiciones de aplicar estas metodologías a diseños concretos reales. Con todo ello, se pone en tela de juicio la validez de los códigos existentes basados en coeficientes de seguridad. La pregunta que se plantea ahora es la siguiente, ¿qué hacer en el futuro?, por desgracia, la respuesta no es fácil, y plantea un gran debate aún sin resolver.

Para tratar de solventar este problema se han tomado medidas al respecto, que van desde la reelaboración de códigos basados en técnicas probabilistas modernas, es decir calibración probabilista, hasta la elaboración de códigos, totalmente probabilistas, que definen las distribuciones estadísticas de las variables que se tienen que considerar en el proyecto y fijan las probabilidades de fallo ‘nominales’ que no deben sobrepasarse. Aún así, son pos-

turas radicales, que hacen que un ingeniero tenga dificultades en entender las metodologías empleadas por ambos paradigmas.

Otro aspecto importante y que diferencia al ingeniero ‘bueno’ del ‘malo’ es que además de ser lo suficientemente seguras, las obras han de ser lo más baratas posibles. Tan ‘mal’ ingeniero es el que diseña barato de forma insegura, como el que diseña caro de forma excesivamente segura y aún peor, el que diseña obras caras e inseguras. Por todo ello, puede garantizarse que la optimización estructural será en un futuro próximo una herramienta muy importante para el diseño de obras civiles.

El trabajo realizado en esta tesis no tiene como objetivo contestar a la pregunta de qué ha de hacerse en el futuro, sino dar una solución al problema mostrando cómo, mediante las técnicas de optimización por descomposición, se puede abordar el diseño de obras civiles desde el punto de vista ‘moderno’ o estadístico, desde el punto de vista ‘clásico’ o determinista, o desde los dos puntos de vista, pudiendo comparar de forma simultánea los dos métodos y beneficiándose de ambos, ésta es sin duda la contribución más original del trabajo.

La tesis está estructurada en dos partes principales: la primera de ellas, ‘**estado del conocimiento**’, presenta los métodos actuales para medir la fiabilidad, haciendo especial hincapié en las técnicas probabilistas, prácticamente desconocidas por la mayoría de los ingenieros. Así, en el capítulo 1 se muestran las diferentes medidas de la fiabilidad estructural, desde los coeficientes de seguridad globales y parciales, hasta el periodo de retorno y el margen de seguridad. También se plantea el problema básico de la fiabilidad y se introducen las medidas probabilistas, de especial relevancia en capítulos posteriores. En el capítulo 2 se tratan los métodos estadísticos para determinar la fiabilidad o probabilidad de fallo, que incluyen tanto los métodos de simulación e integración, como los más empleados en la actualidad FOSM, FORM y SORM, que emplean aproximaciones de primer y segundo orden de las ecuaciones de estado límite. En la última parte se introducen los problemas de optimización basados en fiabilidad. En el capítulo 3 se desarrolla el concepto de dualidad en problemas de optimización, muy importante para poder aplicar las técnicas de descomposición y sensibilidad, que se presentan en capítulos posteriores. En el capítulo 4 se plantea la estructura que ha de tener un problema para aplicar de forma eficiente la optimización por descomposición y las diferentes metodologías empleadas para su resolución.

La segunda parte la componen las ‘**contribuciones originales**’, comenzando con el capítulo 5 en el que se presentan dos metodologías nuevas para el cálculo de la probabilidad de fallo, que formarían parte de los métodos de NIVEL III o ‘exactos’, que tratan de determinar la probabilidad exacta de fallo. En el capítulo 6 se tratan de forma teórica nuevas técnicas de descomposición, planteadas desde un punto de vista genérico aplicable a diferentes problemas del ámbito de la ingeniería y se presenta el método general de análisis de sensibilidad, que es otra de las grandes contribuciones originales de esta tesis. En el capítulo 7 se aplicarán las técnicas de optimización ya existentes y las propuestas en el capítulo 6 a problemas relativos a fiabilidad, en los que se detalla la gran aplicabilidad práctica de los métodos propuestos, así como el análisis de sensibilidad en este tipo de problemas, de especial interés tanto para diseñadores y proyectistas como para constructores. En el capítulo 8, se desarrollan de forma exhaustiva distintas aplicaciones en diferentes ámbitos de la ingeniería civil, diseño de muros de contención, de puentes mixtos, problemas de estabilidad de taludes, diseño de puentes grúa y cálculo de diques de escollera en las que

se enfatiza y recalca de nuevo la importancia práctica de las técnicas de optimización por descomposición y sensibilidad, y que permiten su extensión a cualquier problema dentro del ámbito ingenieril. Por último, en el capítulo 9 se dan una serie de conclusiones y vías futuras de investigación. Para el lector interesado se presentan en el apéndice A los códigos GAMS en los que se implementan los métodos propuestos. Ellos le ayudarán a plantear problemas de optimización probabilista, dejando al software la pesada labor de resolver el complicado problema numérico.

Índice general

Agradecimientos	v
Prefacio	vii
I Estado del Conocimiento	1
1. Medidas de Fiabilidad Estructural	3
1.1. Introducción	3
1.2. Medidas Deterministas	4
1.2.1. Coeficiente de seguridad global	4
1.2.2. Coeficiente de carga	7
1.2.3. Coeficiente de seguridad parcial	7
1.2.4. Deficiencias de las medidas deterministas de la seguridad estructural	8
1.2.5. Medidas invariantes de la seguridad	11
1.3. Medida Parcialmente Probabilista: El Periodo de Retorno	11
1.4. Medidas Probabilistas	12
1.4.1. Introducción	12
1.4.2. Problema básico en fiabilidad	13
1.4.3. Coeficientes de seguridad y valores característicos	16
1.4.4. Problema genérico en fiabilidad	19
2. Métodos para Determinar la Fiabilidad	23
2.1. Introducción	23
2.2. Problema de las colas	25
2.3. Métodos de integración	25
2.4. Métodos de simulación	25
2.4.1. Simulación ponderada	26
2.4.2. Simulación direccional	27
2.5. Método basado en los momentos de segundo orden	28
2.6. Teoría lineal de momentos de segundo orden (FOSM)	29
2.6.1. Índice de fiabilidad de Hasofer-Lind	29
2.6.2. Transformación de Hasofer-Lind	32
2.6.3. Ecuación de estado límite último	33
2.6.4. Parámetros de sensibilidad	37

2.6.5.	Solución numérica para ecuaciones de estado límites no lineales . . .	37
2.6.6.	Límites de la probabilidad de fallo	39
2.7.	Métodos de fiabilidad de primer orden (FORM)	40
2.7.1.	Transformación de las variables	40
2.7.2.	Algoritmo FORM	43
2.7.3.	Aplicación del método FORM al rebase de diques en talud	48
2.8.	Métodos de segundo orden (SORM)	56
2.8.1.	Métodos	56
2.9.	Problemas de Optimización Basados en Fiabilidad	58
2.9.1.	Revisión del estado del arte	59
3.	Dualidad	61
3.1.	Introducción	61
3.2.	Condiciones de optimalidad de Karush-Kuhn-Tucker	61
3.3.	Dualidad en Programación Lineal	67
3.3.1.	Obtención del dual a partir del primal en su forma estándar	68
3.3.2.	Obteniendo el problema dual	69
3.3.3.	Teoremas de dualidad	72
3.4.	Dualidad en programación no lineal	76
4.	Técnicas de Optimización por Descomposición	87
4.1.	Introducción	87
4.2.	Descomposición de Benders	88
4.2.1.	Introducción	88
4.2.2.	Descomposición de Benders	88
4.3.	Descomposición para Restricciones de Complicación	94
4.3.1.	Introducción	94
4.3.2.	Restricciones de complicación	94
4.3.3.	Relajación Lagrangiana	94
4.3.4.	Relajación Lagrangiana Aumentada	98
4.3.5.	Descomposición de las Condiciones de Optimalidad	98
4.3.6.	Aplicación a problemas de fiabilidad	99
4.4.	Variables y Restricciones de Complicación	99
4.5.	Paquetes de Optimización	100
4.5.1.	Método del Gradiente Reducido Generalizado	101
II	Aportaciones Originales	107
5.	Aportaciones a los Métodos de Nivel III	109
5.1.	Introducción	109
5.2.	Probabilidades Extremas Mediante Politopos	109
5.2.1.	Transformación de las variables al hipercono unitario.	110
5.2.2.	Posicionamiento del origen de coordenadas en la región de fallo.	110
5.2.3.	División de la región de fallo en una serie de politopos.	111

5.2.4.	División de cada politopo en símplices.	113
5.2.5.	Evaluación de la integral.	115
5.2.6.	Aplicación del método de los politopos	116
5.3.	Método de Gauss Legendre	121
5.3.1.	Transformación de las variables al hipercubo unitario.	121
5.3.2.	Posicionamiento del origen de coordenadas en la región de fallo.	122
5.3.3.	Caracterización del contorno de la región de fallo.	122
5.3.4.	Evaluación de la integral mediante la cuadratura de Gauss-Legendre	123
5.3.5.	Diseño clásico	128
5.3.6.	Método propuesto	129
6.	Aportaciones: Técnicas de Descomposición	133
6.1.	Introducción	133
6.2.	Métodos Alternativos de Descomposición	133
6.2.1.	Método de Relajación	134
6.2.2.	Método de los hiperplanos aproximantes	140
6.3.	Análisis de Sensibilidad	144
6.3.1.	Introducción	144
6.3.2.	Sensibilidad en optimización restringida. Método general.	144
7.	Aplicación de Descomposición en Fiabilidad	149
7.1.	Introducción	149
7.2.	Problemas de Optimización Basados en la Fiabilidad	149
7.2.1.	Clasificación de las variables	150
7.2.2.	Problemas de optimización estructural con restricciones de fiabilidad	151
7.3.	Aplicación de la descomposición de Benders a un dique	157
7.3.1.	Ejemplo numérico	165
7.4.	Método combinado	165
7.4.1.	Resolución del método combinado (PSFM) mediante el método de relajación	169
7.4.2.	Resolución del método combinado (PSFM) mediante la aproximación por hiperplanos	173
7.5.	Resolución de los Modelos Generales. Global y Parcial.	177
7.6.	Análisis de Sensibilidad	179
7.6.1.	Análisis de sensibilidad en el método combinado probabilidad coeficiente de seguridad (PSFM).	180
7.6.2.	Análisis de sensibilidad en el modelo general.	183
7.7.	Aplicación: Diseño de puentes grúa	185
7.7.1.	Obtención de las restricciones	187
7.7.2.	Ejemplo numérico	189
8.	Aplicaciones	193
8.1.	Muro vertical	193
8.1.1.	Introducción al diseño de muros	193
8.1.2.	Descripción del muro vertical	194

8.1.3.	Clasificación de las variables y modos de fallo considerados	197
8.1.4.	Fuerzas que actúan en el muro	198
8.1.5.	Criterios de diseño o imposiciones del código (requisitos legales) . . .	200
8.1.6.	Función objetivo	203
8.1.7.	Distribuciones estadísticas del modelo	204
8.1.8.	Solución numérica y discusión de los resultados	205
8.1.9.	Análisis de sensibilidad	207
8.1.10.	Simulación de Monte Carlo	210
8.2.	Viga Mixta	210
8.2.1.	El problema de la viga mixta	211
8.2.2.	Restricciones	213
8.2.3.	Función a optimizar	215
8.2.4.	Distribuciones estadísticas del modelo	215
8.2.5.	Ejemplo numérico	216
8.2.6.	Simulación.	217
8.2.7.	Estudio de sensibilidad en el ejemplo numérico	219
8.2.8.	Restricciones del ejemplo de la viga	220
8.2.9.	Notación	227
8.3.	Dique en Talud de Escollera	231
8.3.1.	Clasificación de las variables y modos de fallo considerados	231
8.3.2.	Criterios de diseño	236
8.3.3.	Función a optimizar	237
8.3.4.	Hipótesis estadísticas	238
8.3.5.	Formulación y solución del problema dual	240
8.3.6.	Ejemplo numérico y análisis de los resultados	242
8.3.7.	Simulación de Monte Carlo	245
8.3.8.	Notación	248
8.4.	Estabilidad de Taludes	251
8.4.1.	Aproximación mediante cálculo variacional	252
8.4.2.	Discretización del problema	254
8.4.3.	Aproximación Clásica	256
8.4.4.	Aproximación moderna.	259
8.4.5.	Método combinado de coeficientes de seguridad y probabilidades de fallo	263
8.4.6.	Análisis de sensibilidad	265
9.	Conclusiones y Futuras Líneas de Investigación	269
9.1.	Resumen de Aportaciones	269
9.2.	Conclusiones	271
9.3.	Futuras Líneas de Investigación	274
A.	Códigos GAMS	277
A.1.	Código GAMS del Método de Relajación	277
A.2.	Código GAMS de la Aproximación por Hiperplanos	281
A.3.	Código GAMS de la Descomposición de Benders	284

<i>ÍNDICE GENERAL</i>	xv
A.4. Código GAMS del Método de Relajación Aplicado al Muro	289
A.5. Código GAMS de la Aproximación por Hiperplanos	293
A.6. Código GAMS para el Estudio de la Sensibilidad.	297
Bibliografía	305
Indice	317

Índice de figuras

1.1. Ilustración de las regiones segura, de fallo y la ecuación de estado límite para el caso bidimensional.	5
1.2. Ilustración del aumento de la región segura mediante la utilización del coeficiente de seguridad global.	6
1.3. Diseño mediante la utilización de los coeficientes parciales de seguridad. . .	8
1.4. Estructura del ejemplo 1.1.	10
1.5. Esquema del problema de la fiabilidad en la escala temporal.	13
1.6. Ilustración gráfica de la función de densidad conjunta $f_{RS}(r, s)$, de las funciones de distribución marginales $f_R(r)$ y $f_S(s)$ y del dominio de rotura o fallo D	14
1.7. Representación gráfica de las funciones de densidad marginales, funciones de distribución y probabilidad de fallo del problema básico de la fiabilidad. . .	16
1.8. Definición de los valores característicos para las resistencias R y los esfuerzos S	18
1.9. Viga simplemente apoyada y sección transversal de la misma.	20
2.1. Ilustración gráfica de la superficie de estado límite $G_{\mathbf{X}}(\mathbf{X}) = 0$ y su aproximación lineal en el entorno del punto \mathbf{x}^* para el caso bidimensional. Interpretación gráfica del índice de fiabilidad β de Hasofer-Lind.	29
2.2. Ilustración gráfica de la función de densidad normal estándar bivariada, del índice de fiabilidad de Hasofer-Lind y del ‘punto de diseño’ o de ‘máxima verosimilitud’ en el espacio \mathbf{z}	30
2.3. Ilustración gráfica del índice de fiabilidad β , de las ecuaciones de estado límite, tanto lineales como no lineales $g_{\mathbf{z}}(\mathbf{z})$ y de los contornos de la función de densidad normal estándar bivariada.	34
2.4. Ilustración gráfica del método de Hasofer-Lind para el caso bidimensional, en la que se aprecia la interpretación geométrica de todas las variables que intervienen.	39
2.5. Cota superior de la probabilidad de fallo cuando la región de fallo es convexa con respecto al origen.	40
2.6. Cota superior de la probabilidad de fallo cuando la región de fallo es cóncava con respecto al origen.	41

2.7.	Ilustración de cómo se transforma el conjunto inicial de variables en un conjunto de variables uniformes independientes primero, y en un conjunto de variables normales independientes estándar después.	42
2.8.	Ilustración gráfica del ejemplo computacional 2.1 en el que muestran diferentes contornos de la ecuación de estado límite $g_{\mathbf{z}}(\mathbf{z})$, el punto de inicio $\mathbf{z}^{(1)}$, el correspondiente a la segunda iteración $\mathbf{z}^{(2)}$ y el punto solución \mathbf{z}^*	45
2.9.	Ilustración del dique en talud y sus principales elementos.	49
3.1.	Ilustración de las condiciones de Karush-Kuhn-Tucker para el caso de una restricción de desigualdad en el caso bidimensional.	63
3.2.	Ilustración de las condiciones de Karush-Kuhn-Tucker para el caso de dos restricciones de desigualdad en el caso bidimensional.	64
3.3.	Ilustración de las condiciones de Karush-Kuhn-Tucker para el caso de una restricción de desigualdad y una restricción de igualdad en el caso bidimensional.	65
3.4.	Reglas para obtener los problemas duales de los primales y viceversa.	70
3.5.	Representación gráfica del problema de la planificación del carpintero.	74
3.6.	Representación gráfica del sistema expandido.	75
3.7.	Ilustración gráfica del punto de silla del Lagrangiano en el punto $(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*, \boldsymbol{\mu}^*)$	82
4.1.	Evolución de los límites inferior y superior del valor óptimo de la función objetivo del problema del ejemplo ilustrativo 4.1.	93
4.2.	Ilustración gráfica de la reconstrucción por hiperplanos de la función dual $\phi(\boldsymbol{\lambda})$	96
5.1.	Ilustración gráfica de cómo se genera la malla inicial n -dimensional sobre la hiperesfera unitaria, de tal forma que se puedan construir los radiovectores que emanen del origen y pasen por los nodos de la malla.	111
5.2.	Ilustración gráfica de cómo se construye la nueva malla partiendo de los nodos iniciales en la hiperesfera, la intersección de los radiovectores OA_i con la región de fallo constituyen los nuevos nodos. Caso bidimensional.	112
5.3.	Ilustración gráfica de cómo la región de fallo (dibujo de la izquierda) se divide en un conjunto de politopos utilizando la malla sobre el contorno de la región de fallo (dibujo de la derecha), que se obtiene mediante la intersección de los radiovectores que parten del origen y que pasan por los nodos de la malla esférica (dibujo central).	113
5.4.	Ilustración de cómo el hipercono unitario n -dimensional se divide en $n!$ simples (en este ejemplo tridimensional, 6 simples).	114
5.5.	Ilustración de cómo se transforma el conjunto inicial de variables aleatorias en un conjunto de variables uniformemente distribuidas independientes.	122
5.6.	Distribuciones logarítmico normales para las variables P y s , en el caso 1.	127
5.7.	Distribuciones logarítmico normales para las variables L, b y c , en el caso 1.	127
6.1.	Ilustración gráfica del ejemplo computacional 6.1.	139
6.2.	Evolución del error para distintos valores de coeficiente de relajación ρ y con el método de actualización dual λ	141

6.3. Evolución del error con el método de aproximación por hiperplanos y con el de relajación con el método de actualización dual λ	143
7.1. Metodología general para plantear el diseño estructural.	152
7.2. Variables, factores, estados de proyecto y modos de evaluación de la fiabilidad.	153
7.3. Parametrización del dique de escollera usado en el ejemplo.	158
7.4. Ilustración gráfica de las funciones de coste.	159
7.5. Ilustración gráfica de la reconstrucción de la función de coste total mediante cortes de Benders.	164
7.6. Evolución de las cotas inferior y superior del valor óptimo del coste total para el ejemplo del dique de escollera.	165
7.7. Muro y fuerzas actuantes.	167
7.8. Ilustración de los tres modos de fallo considerados para el ejemplo del muro.	168
7.9. Diagrama de flujo del método combinado de probabilidades de fallo y coeficientes de seguridad.	171
7.10. Ilustración gráfica del puente grúa y la viga principal.	185
7.11. Ilustración de los modos de fallo considerados para el puente grúa.	186
8.1. Descripción geométrica del muro.	195
8.2. Detalle de la posición de la armadura.	196
8.3. Descomposición de la sección transversal del muro en elementos geométricos simples (triángulos y rectángulos) para calcular: (a) el peso del muro, y (b) el peso del terreno.	199
8.4. (a) Presiones del terreno a ambos lados del muro. (b) Reacciones del peso del muro, del terreno y del empuje del terreno sobre el muro.	200
8.5. Ilustración de la localización de la reacción en la base del muro.	201
8.6. Presiones actuando en la base del muro. Caso a) ambas presiones son positivas. Caso b) σ_t es nula, y no existen tracciones.	202
8.7. Ilustración del cálculo de las armaduras.	202
8.8. Ilustración de las fuerzas que intervienen en el cálculo de las armaduras en: (a) la sección crítica del alzado, (b) sección crítica de la puntera y (c) en la sección crítica del talón.	204
8.9. Puente mixto biapoyado utilizado en el Ejemplo.	211
8.10. Definición geométrica de la viga mixta.	212
8.11. Posiciones posibles del eje neutro de plastificación de la sección.	223
8.12. Plastificación por flexión.	223
8.13. Cargas consideradas que actúan en el puente mixto.	224
8.14. Ilustración del fallo de los conectores debido al hormigón circundante.	226
8.15. Parametrización del dique en talud usada en el ejemplo ilustrativo.	232
8.16. Fuerzas que actúan sobre el espaldón y que pueden producir el deslizamiento con respecto a su base.	235
8.17. Ilustración gráfica del problema de estabilidad de taludes, mostrando la línea de deslizamiento y la discretización seleccionada.	255
8.18. Perfil del talud seleccionado para el ejemplo ilustrativo.	256

8.19. Valores óptimos de F^* en función de N^* y zona ampliada en el entorno de origen.	257
8.20. Líneas de deslizamiento críticas para diferentes valores de N^*	258
8.21. Valores óptimos de F en función N	259

Índice de cuadros

1.1. Medias y desviaciones estándar de los logaritmos de las 5 variables aleatorias que intervienen en el ejemplo computacional 1.3.	22
2.1. Jerarquía de las medidas de fiabilidad estructural.	24
2.2. Evolución del algoritmo 2.2 para el ejemplo computacional 2.1.	47
2.3. Distribuciones estadísticas de las variables en el ejemplo de rebase.	51
3.1. Datos del problema de la planificación del carpintero.	73
3.2. Problemas primal y dual con las correspondientes soluciones para el ejemplo numérico.	81
5.1. Ilustración de la calidad de la aproximación en función del número de subdivisiones m y del número de variables n para la suma de variables uniformes independientes, junto con una comparación con el método Monte Carlo. . .	117
5.2. Ilustración de la calidad de la aproximación en función del número de subdivisiones m y del número de variables n para la suma de variables normales independientes, junto con una comparación con el método Monte Carlo. . .	118
5.3. Ilustración de la calidad de la aproximación en función del número de subdivisiones m y del número de variables n para el cociente de la suma de variables exponenciales independientes, junto con una comparación con el método Monte Carlo.	120
5.4. Estimaciones de la probabilidad de fallo para distintas aproximaciones del método de Gauss-Legendre (versión optimizada).	127
5.5. Medias y desviaciones estándar de las 5 variables aleatorias que intervienen en el ejemplo ilustrativo 5.3 para los casos 1 y 2.	128
5.6. Estimaciones de la probabilidad de fallo para distintos valores de los parámetros del método de integración de Gauss-Legendre en su versión optimizada. . .	130
6.1. Procedimiento iterativo hasta que se obtiene la solución en el ejemplo ilustrativo 6.1.	137
6.2. Ilustración del procedimiento iterativo para el ejemplo computacional 6.1. . .	140
6.3. Ilustración del procedimiento iterativo para el ejemplo computacional 6.2. . .	143
6.4. Sensibilidades del ejemplo ilustrativo 6.2.	147
7.1. Ilustración del procedimiento iterativo.	166

7.2. Datos para el ejemplo numérico del muro.	173
7.3. Ilustración del procedimiento iterativo de relajación para el ejemplo del muro.	173
7.4. Ilustración del procedimiento iterativo de resolución mediante la aproximación por hiperplanos.	176
7.5. Sensibilidades en el ejemplo ilustrativo del muro.	182
7.6. Ilustración del procedimiento iterativo para el ejemplo del puente grúa.	190
7.7. Sensibilidades del ejemplo del puente grúa.	191
8.1. Distribución estadística de las variables del ejemplo del muro.	205
8.2. Ilustración del proceso iterativo. Los valores finales están en negrita.	206
8.3. Sensibilidades con respecto a los datos del problema.	207
8.4. Sensibilidades $\frac{\partial \beta_i}{\partial x}$, con respecto a los datos x , en el ejemplo del muro.	208
8.5. Sensibilidades $x \frac{\partial \beta_i}{\partial x}$, con respecto a los datos x , en el ejemplo del muro.	209
8.6. Ilustración de la simulación de Monte Carlo.	210
8.7. Ilustración del proceso iterativo. Los valores de diseño finales aparecen en negrita.	218
8.8. Resultados de la simulación de Monte Carlo para 10^7 realizaciones.	219
8.9. Sensibilidades al coste con respecto a los datos en el ejemplo ilustrativo del muro.	219
8.10. Sensibilidades $\frac{\partial \beta_i}{\partial x}$, con respecto a los datos x , en el ejemplo ilustrativo de la viga.	221
8.11. Valores nominales, estadísticos y costes del ejemplo numérico.	243
8.12. Ilustración del proceso iterativo. Los valores de diseño finales están en negrita, mientras que los coeficientes de seguridad o índices de fiabilidad activos se encuentran subrayados.	244
8.13. Sensibilidades del coste $\frac{\partial C}{\partial x}$ con respecto a los datos (η) del ejemplo del dique en talud.	245
8.14. Sensibilidades de los índices de fiabilidad $\frac{\partial \beta_i}{\partial x}$, con respecto a los datos $x = (\eta, \kappa)$ del ejemplo del dique en talud. Valores positivos indican el aumento del índice cuando el parámetro correspondiente aumenta en una unidad.	246
8.15. Simulación de Monte Carlo para estimar las probabilidades de fallo para cada combinación posible de modos de fallo.	247
8.16. Ilustración del procedimiento iterativo para el ejemplo computacional 8.4.	262
8.17. Sensibilidades del índice de fiabilidad con respecto a los parámetros del modelo.	266
8.18. Evolución del procedimiento iterativo.	266
8.19. Sensibilidades del índice de fiabilidad β con respecto a los parámetros estadísticos.	267

Parte I

Estado del Conocimiento

Capítulo 1

Medidas de Fiabilidad Estructural

1.1. Introducción

Toda estructura ingenieril debe cumplir una serie de requisitos que la hagan idónea para cumplir el objetivo deseado. La forma en la que responderá a los estímulos externos (cargas) dependerá del tipo y magnitud de las cargas, del diseño, de las propiedades de los materiales (resistencia, rigidez, ...), etc. La estructura deberá satisfacer ciertos requerimientos, que pueden hacer referencia a la seguridad frente al colapso, a las limitaciones en el daño de ciertos elementos, a excesivas deformaciones que puedan dar sensación de inseguridad, etc. Cada uno de estos condicionantes se denomina estado límite, y la superación o violación de un determinado estado límite supone el alcance de una situación indeseable para la estructura (véase Melchers [121]).

Definición 1.1 (Estado límite). *Se entiende por estado límite de una estructura a la situación para la que, en caso de ser superada, puede considerarse que la estructura no cumple con alguna de las funciones para las que fue diseñada.*



Los estados límites pueden clasificarse en:

1. **Parada operativa.** Se deben a una interrupción del uso normal, producida principalmente por agentes temporales (atmosféricos) que impiden una utilización segura de la estructura, sin perjuicio de que una vez hayan cesado los efectos del agente se pueda utilizar de nuevo tal y como fue diseñada. Este estado se utiliza principalmente en ingeniería portuaria, y por ejemplo se da cuando no se puede utilizar un muelle por haber un temporal muy fuerte.
2. **Servicio.** Se deben a una interrupción del uso normal, producida por deformaciones excesivas, vibraciones, daños superficiales, etc.
3. **Daño.** Son problemas que requieren reparaciones importantes para evitar el colapso de la estructura, puede deberse a fisuración excesiva o prematura, deformaciones plásticas, etc.

4. **òltimo.** Hace referencia al colapso de toda o parte de la estructura, ruptura, mecanismos plásticos, inestabilidad, fatiga, deterioro importante, etc.

Desde el punto de vista práctico, esta claro que el porcentaje de estructuras que colapsan, o requieren reparaciones importantes es muy pequeño. De tal forma que se puede afirmar con seguridad que la superación de los estados límites más serios tiene una tasa muy pequeña de ocurrencia (véase Vrouwenvelder [167]). Ahora sí, cuando sucede las consecuencias pueden ser devastadoras.

En síntesis, durante la vida útil, los requisitos mínimos a los que al menos, debe dar respuesta una estructura son: resistencia mecánica y estabilidad, seguridad en caso de accidente y seguridad de uso. El estudio de la fiabilidad estructural trata de calcular y predecir la probabilidad de que se produzca la superación de alguno de los estados límites para los que fue diseñada la estructura.

Definición 1.2 (Vida útil). *Se entiende por vida útil de una estructura el periodo de tiempo, a partir de su puesta en servicio, durante el que debe mantener unas condiciones de seguridad, funcionalidad y aspecto aceptables. Durante este tiempo requerirá una conservación normal adecuada sin operaciones de rehabilitación.*

■

La seguridad de una estructura frente al riesgo de violación de un determinado estado límite puede expresarse en términos de su probabilidad de ocurrencia. Esta medida puede obtenerse o bien mediante registros de largo periodo de ocurrencia de eventos en estructuras similares, o con una estimación subjetiva de su valor numérico. Desde el punto de vista práctico, rara vez se dispone de registros de datos fiables, y por lo tanto se recurre a una combinación de datos y estimación subjetiva para predecir el valor de la probabilidad de superación de estado límite.

Existen diferentes maneras de medir la fiabilidad estructural, desde los métodos clásicos basados en coeficientes de seguridad, que son medidas deterministas que tienen en cuenta la aleatoriedad de las variables de forma implícita, hasta los más modernos, basados en probabilidad, que tienen en cuenta de forma explícita la incertidumbre de las variables aleatorias mediante su función de densidad.

1.2. Medidas Deterministas

1.2.1. Coeficiente de seguridad global

El método tradicional para definir la seguridad estructural es mediante el coeficiente de seguridad. Sea (X_1, X_2, \dots, X_n) el conjunto de variables de diseño o factores de proyecto (resistencias, sobrecargas, dimensiones, ...), que pertenecen a un espacio n -dimensional. Éste puede ser dividido en dos regiones respecto a un determinado estado límite (véase la figura 1.1): la región segura en la que se satisfacen los condicionantes de proyecto, y la región de fallo, en la que deja de cumplirse la función para la que se diseñó.

$$\begin{aligned} \text{Región segura:} & \quad \mathcal{S} \equiv \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid g(x_1, x_2, \dots, x_n) > 1\}, \\ \text{Región de fallo:} & \quad \mathcal{F} \equiv \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid g(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq 1\}, \end{aligned} \tag{1.1}$$

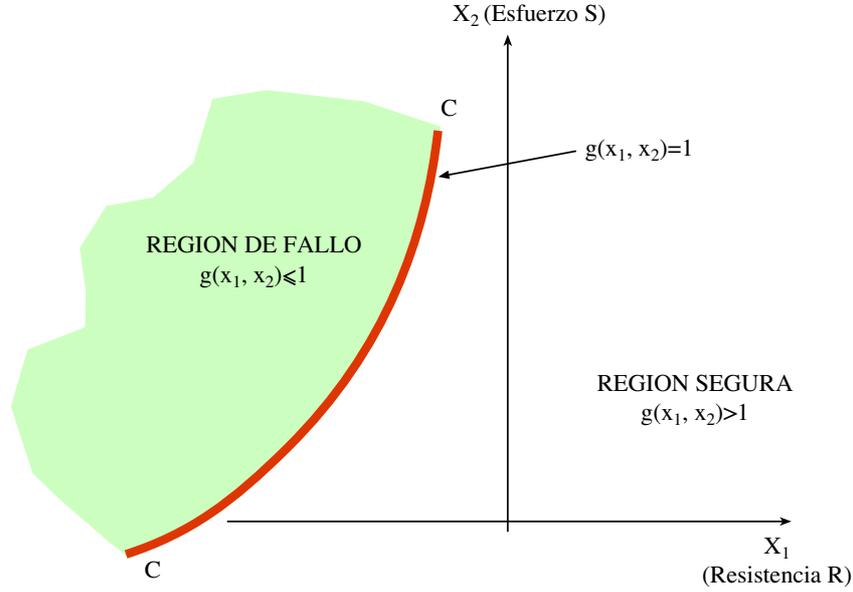


Figura 1.1: Ilustración de las regiones segura, de fallo y la ecuación de estado límite para el caso bidimensional.

donde $g(x_1, x_2, \dots, x_n)$ es el cociente adimensional entre dos magnitudes opuestas,

$$g(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{h_R(x_1, x_2, \dots, x_n)}{h_S(x_1, x_2, \dots, x_n)} \quad (1.2)$$

donde $h_R(x_1, x_2, \dots, x_n)$ y $h_S(x_1, x_2, \dots, x_n)$ son las magnitudes que favorecen la seguridad (normalmente términos asociados a las resistencias) frente al estado límite considerado, y la superación del mismo (usualmente cargas o momentos que actúan), respectivamente.

Dado que la ecuación (1.1) es una condición límite, el método del coeficiente de seguridad global considera las variables (X_1, X_2, \dots, X_n) como deterministas e iguales a sus valores representativos principales (valores nominales) y añade un margen de seguridad de la forma siguiente:

$$g^*(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{h_R(x_1, x_2, \dots, x_n)}{h_S(x_1, x_2, \dots, x_n)} - F > 0 \quad (1.3)$$

donde F es el coeficiente de seguridad ($F > 1$).

En la figura 1.2 puede observarse cómo la utilización para el diseño del coeficiente de seguridad F implica un aumento de la región segura (la ecuación de estado límite o rotura $g(x_1, x_2) = 1$ se desplaza a la izquierda con respecto a la de la figura 1.1), y por lo tanto disminuye la incertidumbre de superación del estado límite.

Este método pretende eliminar la incertidumbre asociada a la aleatoriedad de las variables dando un margen entre las magnitudes que pueden impedir el fallo (estabilizadoras) y las que lo pueden provocar (desestabilizadoras). La elección del valor del factor de seguridad

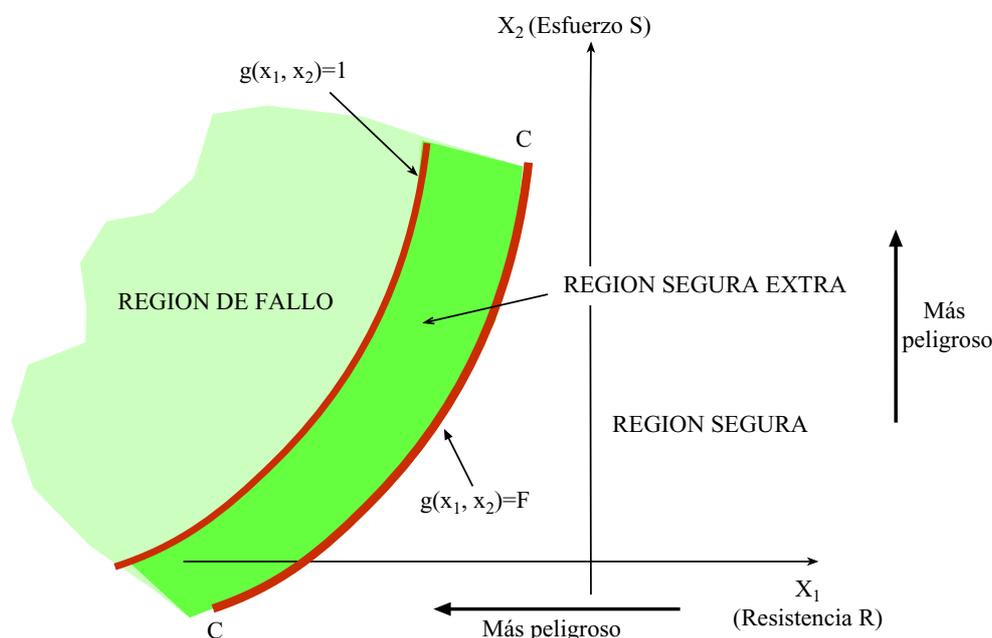


Figura 1.2: Ilustración del aumento de la región segura mediante la utilización del coeficiente de seguridad global.

puede deberse a observaciones experimentales, basándose en la experiencia previa, condicionantes políticos, económicos, etc. Usualmente es decidido por un comité de expertos.

Combinando las expresiones (1.1) y (1.3) se puede escribir la condición de superación de estado límite como

$$\frac{h_R(x_1, x_2, \dots, x_n)}{F} \leq h_S(x_1, x_2, \dots, x_n). \quad (1.4)$$

La expresión (1.4) es una ecuación de estado límite cuando se reemplaza el signo de la desigualdad por igualdad y definirá cuando se alcanza de forma estricta una situación indeseable en la estructura. Por tanto un diseño será aceptable desde el punto de vista de la seguridad siempre que no se cumpla la condición (1.4).

Como ejemplo ilustrativo, se particulariza al caso de análisis de tensiones elástico en el que las funciones $h_R(x_1, x_2, \dots, x_n)$ y $h_S(x_1, x_2, \dots, x_n)$ se corresponden con las resistencias y los esfuerzos, respectivamente, se obtendrá la siguiente expresión de seguridad

$$\sigma_i(\epsilon) \leq \sigma_{pi}, \quad (1.5)$$

que implica que no se producirá rotura siempre y cuando la componente i -ésima de la tensión $\sigma_i(\epsilon)$ en un punto genérico ϵ sea menor que la tensión permisible σ_{pi} usualmente definida en los códigos y normas de diseño estructural. Ésta se obtendrá de la resistencia de materiales en términos de σ_{ui} (tensión última resistida) y se reducirá por el coeficiente de seguridad F :

$$\sigma_{pi} = \frac{\sigma_{ui}}{F} \quad (1.6)$$

La condición de estado límite (1.4) en este caso es

$$\frac{\sigma_{ui}(\epsilon)}{F} \leq \sigma_i(\epsilon) \quad \text{or} \quad \frac{\sigma_{ui}(\epsilon)}{F} / \sigma_i(\epsilon) \leq 1. \quad (1.7)$$

1.2.2. Coeficiente de carga

El ‘coeficiente de carga’ λ es un tipo especial de factor de seguridad desarrollado inicialmente para estudios de plasticidad. Se define como el factor teórico por el que hay que multiplicar las cargas que actúan en una estructura para producir su colapso. Las cargas son aquellas a las que va estar sometida la estructura en condiciones de servicio y las resistencias se obtienen de la teoría de la plasticidad en estructuras.

Así, para un determinado modo de fallo i , se supone que la estructura colapsa si las resistencias plásticas (R_{pi}) son menores que las cargas ponderadas (λQ_j) de la forma

$$W_R(\mathbf{R}_P) \leq W_Q(\lambda \mathbf{Q}) \quad (1.8)$$

donde \mathbf{R}_P es el vector de todas las resistencias plásticas (e.j. momentos plásticos) y \mathbf{Q} es el vector de cargas aplicadas. Los términos $W_R(\cdot)$ y $W_Q(\cdot)$ son los trabajos internos y externos, respectivamente, ambos descritos para el modo de fallo considerado.

Si el trabajo externo es proporcional a la carga, como ocurre usualmente, se puede sacar factor común y descomponer las cargas en varias componentes, asociadas a distintos fenómenos, tales como peso propio, viento, nieve, etc. Así (1.8) puede escribirse en forma de ecuación de estado límite de la siguiente manera:

$$\frac{W_R(\mathbf{R}_P)}{\lambda W_Q(\mathbf{Q}_D + \mathbf{Q}_L + \dots)} = 1 \quad (1.9)$$

donde ocurre fallo si el término de la izquierda es menor que 1.

Este método se incluye, pese a estar actualmente en desuso, por motivos históricos, ya que su evolución posterior dió lugar a los métodos actuales de coeficientes de seguridad.

1.2.3. Coeficiente de seguridad parcial

El desarrollo de las dos metodologías anteriores derivó en la utilización del coeficiente de seguridad parcial, de tal forma que la ecuación de estado límite (1.4) queda como:

$$\phi_i R_i \leq \gamma_{Di} S_{Di} + \gamma_{Li} S_{Li} + \dots \quad (1.10)$$

donde R es la resistencia, ϕ es el coeficiente parcial asociado a R , y S_D y S_L son los efectos producidos por distintas sobrecargas (peso propio, nieve, viento, ...). Originalmente, esta metodología se desarrolló para los códigos de hormigón armado en la década de los 60. Y permitía ponderar de distinta forma los efectos de las distintas sobrecargas, corregir desviaciones desfavorables de los valores representativos, corregir imprecisiones en los modelos, etc. Su consolidación se debió a la flexibilidad con la que permitía representar las incertidumbres asociadas a las cargas y resistencias.

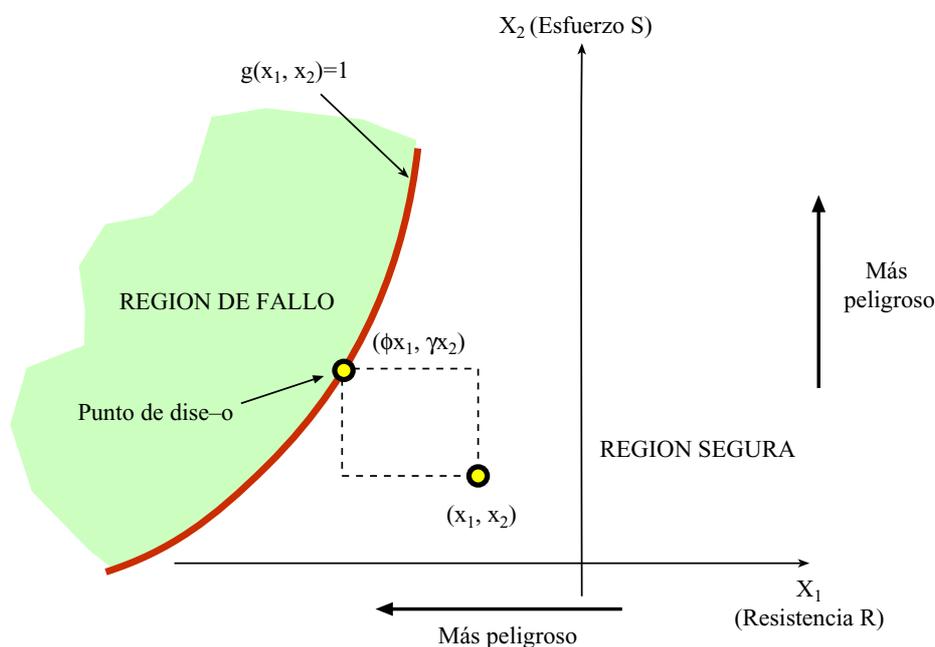


Figura 1.3: Diseño mediante la utilización de los coeficientes parciales de seguridad.

Obsérvese que en esta subsección se ha prescindido de las expresiones generales de las funciones $h_R(x_1, x_2, \dots, x_n)$ y $h_S(x_1, x_2, \dots, x_n)$ de la ecuación (1.2). Esto se debe a motivos históricos, ya que dado que inicialmente esta teoría se desarrolló para estudios estructurales, las funciones estaban perfectamente identificadas y el problema se reducía al estudio de resistencias (R) y esfuerzos (S). Esto no quiere decir que el método no sea aplicable a otros campos, o situaciones en los que no sea posible reducir el problema a esas dos magnitudes.

Considérense dos variables aleatorias X_1, X_2 que se corresponden con una resistencia (R) y un esfuerzo (S) en un punto genérico de un sólido. La superación del estado límite, es decir, que la resistencia sea menor que el esfuerzo que actúa, tiene lugar tanto más en cuanto los valores de las resistencias y esfuerzos disminuyan y aumenten, respectivamente. Pues bien, un diseño basado en coeficientes parciales de seguridad fijaría los valores de las variables (x_1, x_2) de tal forma que el punto $(\phi x_1, \gamma x_2)$ esté en la región segura (véase la figura 1.3). Los valores de los coeficientes de seguridad han de cumplir la condición

$$\phi < 1, \quad \gamma > 1,$$

es decir, se trata de coeficientes de minoración (resistencias) y mayoración (cargas), respectivamente.

1.2.4. Deficiencias de las medidas deterministas de la seguridad estructural

En las secciones anteriores se ha visto cómo se utilizan los coeficientes parciales de seguridad como una medida de la fiabilidad estructural. Éstos dependían del modo de

fallo considerado y de la definición de los esfuerzos S , resistencias R , o de las funciones $h_S(x_1, x_2, \dots, x_n)$ y $h_R(x_1, x_2, \dots, x_n)$ dependiendo del método utilizado. Pero la definición de estos elementos puede no ser única y los valores representativos de las variables aleatorias (valores nominales) pueden variar (cuantiles diferentes), con lo cual los valores de los coeficientes tampoco tienen por qué ser únicos. Este fenómeno se conoce con el nombre de falta de invarianza de las medidas de seguridad, y surge por las distintas formas en las que se pueden definir las relaciones entre cargas y resistencias. Lo ideal, desde el punto de vista de la fiabilidad estructural, es que la determinación del nivel de seguridad fuera un invariante.

Ejemplo ilustrativo 1.1 (Invarianza de las medidas de fiabilidad). Considérese la estructura mostrada en la figura 1.4, que está situada sobre dos apoyos. La resistencia a compresión del apoyo B es de $R = 24$. La seguridad de la estructura puede determinarse de muchas formas distintas, entre ellas las tres siguientes (véase Ditlevsen [63] y Melchers [121]):

1. **Resistencia al vuelco respecto a A**

$$F_1 = \frac{\text{momento resistente respecto a A}}{\text{momento volcador respecto a A}} = \frac{d \times R}{M + Wd/2} = \frac{10 \times 24}{100 + 4 \times 5} = 2,0 \quad (1.11)$$

2. **Capacidad del apoyo B**

$$F_2 = \frac{\text{resistencia a compresión del apoyo B}}{\text{carga aplicada sobre el apoyo B}} = \frac{R}{M/d + W/2} = \frac{24}{10 + 2} = 2,0 \quad (1.12)$$

3. **Capacidad neta del apoyo B**

$$F_3 = \frac{\text{resistencia neta a compresión del apoyo B}}{\text{carga neta aplicada sobre el apoyo B}} = \frac{R - W/2}{M/d} = \frac{24 - 2}{10} = 2,2 \quad (1.13)$$

Nótese que con las dos primeras definiciones del coeficiente de seguridad global aplicado a la estructura el resultado es el mismo, pero en el último caso el coeficiente de seguridad es diferente. Aún así, las tres definiciones tratan de medir la fiabilidad frente a la superación del estado límite de rotura del soporte y dado que la estructura y la hipótesis de carga son únicas, la medida de la fiabilidad tendría que ser igual y no es así.

La solución de este problema mediante coeficientes de seguridad pasa por utilizar coeficientes de seguridad parciales que hagan que se produzca el fallo en la estructura, es decir, que el coeficiente de seguridad global sea igual a 1. Lógicamente, dado que la estructura y el estado límite considerado son los mismos, en rotura estricta $F = 1$, los tres coeficientes han de ser iguales. Así, por ejemplo, si aplicamos un coeficiente parcial a la resistencia $\phi = 0,5$ se obtienen los siguientes valores de los coeficientes:

$$F_1 = \frac{d\phi R}{M + Wd/2} = \frac{10 \times 0,5 \times 24}{100 + 4 \times 10/2} = 1, \quad (1.14)$$

$$F_2 = \frac{\phi R}{M/d + W/2} = \frac{0,5 \times 24}{100/10 + 4/2} = 1, \quad (1.15)$$

$$F_3 = \frac{\phi R - W/2}{M/d} = \frac{0,5 \times 24 - 4/2}{100/10} = 1. \quad (1.16)$$

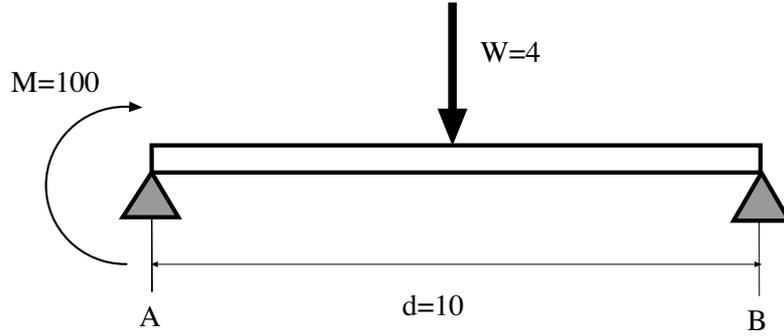


Figura 1.4: Estructura del ejemplo 1.1.

El mismo resultado podría haberse obtenido utilizando un coeficiente parcial $\gamma = 2$ aplicado a las cargas:

$$F_1 = \frac{dR}{\gamma(M + Wd/2)} = \frac{10 \times 24}{2(100 + 4 \times 10/2)} = 1, \quad (1.17)$$

$$F_2 = \frac{R}{\gamma(M/d + W/2)} = \frac{24}{2(100/10 + 4/2)} = 1, \quad (1.18)$$

$$F_3 = \frac{R - \gamma W/2}{\gamma M/d} = \frac{24 - 2 \times 4/2}{2 \times 100/10} = 1. \quad (1.19)$$

De hecho, cualquier combinación de valores ϕ , γ que hagan que $F_i = 1$, igualarán a 1 los demás coeficientes.

$$F_1 = \frac{d\phi R}{\gamma(M + Wd/2)}, \quad F_2 = \frac{\phi R}{\gamma(M/d + W/2)}, \quad F_3 = \frac{\phi R - \gamma W/2}{\gamma M/d}. \quad (1.20)$$

Una forma alternativa de medir la seguridad es mediante el ‘margen de seguridad’, que mide el exceso de resistencia comparado con el esfuerzo o sobrecarga resultante. Se obtiene reordenando los términos de la ecuación (1.3), así:

$$z(x_1, x_2, \dots, x_n) = h_R(x_1, x_2, \dots, x_n) - h_S(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (1.21)$$

Para el ejemplo actual, es posible comprobar que en el punto de fallo, es decir, cuando los valores de las variables aleatorias R , M , W y d hacen que $z_1 = 0$, los valores de z_2 y z_3 son también iguales a 0, y viceversa. Así, por ejemplo, si $R = 24 \times 0,8 = 19,2$, $M = 1,6 \times 100 = 160$, $W = 1,6 \times 4 = 6,4$ y $d = 10$ tenemos que:

$$\begin{aligned} z_1 &= dR - (M + Wd/2) = 10 \times 19,2 - (160 + 6,4 \times 10/2) = 0, \\ z_2 &= R - (M/d + W/2) = 19,2 - (160/10 + 6,4/2) = 0, \\ z_3 &= R - W/2 - M/d = 19,2 - 6,4/2 - 160/10 = 0. \end{aligned} \quad (1.22)$$

■

1.2.5. Medidas invariantes de la seguridad

En el ejemplo ilustrativo (1.1) se ha comprobado que utilizando unos coeficientes parciales adecuados para las resistencias y cargas se podría obtener una medida invariante de la seguridad. Este es el motivo por el cual el método que más se emplea en la actualidad es el de los coeficientes parciales, ya que con una buena selección de los coeficientes se consigue una medida coherente independientemente de la forma en la que se planteen las ecuaciones de verificación.

La clave para poder utilizar este método adecuadamente es que los coeficientes $\phi < 1$ deben aplicarse a las resistencias, mientras que los factores $\gamma > 1$ han de aplicarse sólo a las cargas (véase Ditlevsen [63]). Y además en el punto de fallo del estado límite, el ratio entre cada par $\phi_i R_i$ y $\gamma_j Q_j$ ha de ser igual a 1. Esto equivale a reducir todas las variables a una base común antes de compararlas.

Otra medida invariante que se emplea en fiabilidad es el margen de seguridad (1.21).

1.3. Medida Parcialmente Probabilista: El Periodo de Retorno

En el desarrollo histórico del diseño en ingeniería, las acciones debidas a fenómenos naturales, tales como vientos, sismos, terremotos, avenidas, etc. se consideraron desde un principio como aleatorias, tanto espacial como temporalmente. Para eliminar la incertidumbre temporal se recurrió al periodo de retorno (T). Obviamente el periodo de retorno es una variable aleatoria.

Definición 1.3 (Periodo de retorno). *Se entiende por periodo de retorno de un proceso al tiempo medio que transcurre entre dos eventos sucesivos estadísticamente independientes.* ■

Si la ocurrencia de sucesos es aleatoria, y se considera a la variable X como el tiempo entre sucesos. Entonces el periodo de retorno se definirá como

$$T = E(X) \quad (1.23)$$

donde $E(\cdot)$ representa la esperanza de la variable aleatoria que se indique.

En la mayoría de las aplicaciones prácticas un evento constituye la superación de un determinado umbral asociado con una acción (e. j. caudal $> 2000 \text{ m}^3/\text{s}$), tal evento puede utilizarse como ‘carga de diseño’ y se considera como determinista en el procedimiento de diseño. Es por ello, por lo que se considera una medida parcialmente probabilista.

La definición del periodo de retorno depende en gran medida de las hipótesis consideradas sobre las distribuciones de los sucesos. Así, si los sucesos son binomiales, en los que en cada unidad de tiempo i , se define una variable aleatoria Y_i , $i = 1, 2, \dots$ tales que para cada i

$$P[Y_i = 1] = p, \quad P[Y_i = 0] = 1 - p, \quad 0 < p \leq 1 \quad (1.24)$$

siendo las Y_i ; $i = 1, 2, \dots$ variables independientes (variables Bernoulli), en las que el valor 1 corresponde a suceso observado y el 0 a suceso no observado. Se llama proceso binomial a la sucesión de estas variables.

El tiempo transcurrido entre sucesos X será una variable aleatoria con distribución geométrica, que da la probabilidad de que el tiempo transcurrido hasta que sucede la primera ocurrencia del suceso sea $X = x$:

$$P[X = x] = p(1 - p)^{(x-1)} \quad x = 1, 2, \dots \quad (1.25)$$

El periodo medio entre sucesos o ‘periodo de retorno’ es entonces el valor esperado de X :

$$\begin{aligned} E[X] = \bar{T} &= \sum_{x=1}^{\infty} xp(1-p)^{(x-1)} = \\ &= \frac{p}{(1 - (1-p))^2} = \frac{1}{p} \end{aligned} \quad (1.26)$$

Por lo tanto el periodo de retorno es igual al inverso de la probabilidad de ocurrencia del suceso en el periodo de tiempo unidad considerado. Para la mayoría de los problemas ingenieriles ese periodo es de un año, de tal forma que p es la probabilidad de ocurrencia del evento $x > X$ en un año, mientras que \bar{T} es el numero medio de años entre eventos.

La utilización del periodo de retorno tiene dos condicionantes:

1. La definición de periodo de retorno depende de la escala de tiempo utilizada.
2. La posible ocurrencia de más de un evento dentro de un mismo intervalo es ignorada. Esto supone que si la frecuencia de ocurrencia del evento considerado es muy grande comparado con el intervalo de tiempo seleccionado se produce un gran error en el estudio del proceso.

Por tanto la aproximación descrita es válida sólo para sucesos raros (de baja probabilidad) en el periodo unidad.

1.4. Medidas Probabilistas

1.4.1. Introducción

En la sección 1.2 se ha tratado una medida determinista de la incertidumbre mediante el empleo de coeficientes de seguridad. En la sección 1.3 se ha tratado la incertidumbre temporal mediante el periodo de retorno, transformando el problema final en uno determinista. Ahora bien, pese a que ésta es una herramienta muy útil para la definición de sobrecargas o acciones extremas, ignora el hecho de que incluso para un tiempo definido, la sobrecarga tiene un nivel de incertidumbre asociado.

La información sobre la incertidumbre de las variables se puede representar mediante su función de densidad $f_Q(q)$, que da la probabilidad de que la carga Q tome el valor q :

$$P(q = Q) = f_Q(q). \quad (1.27)$$

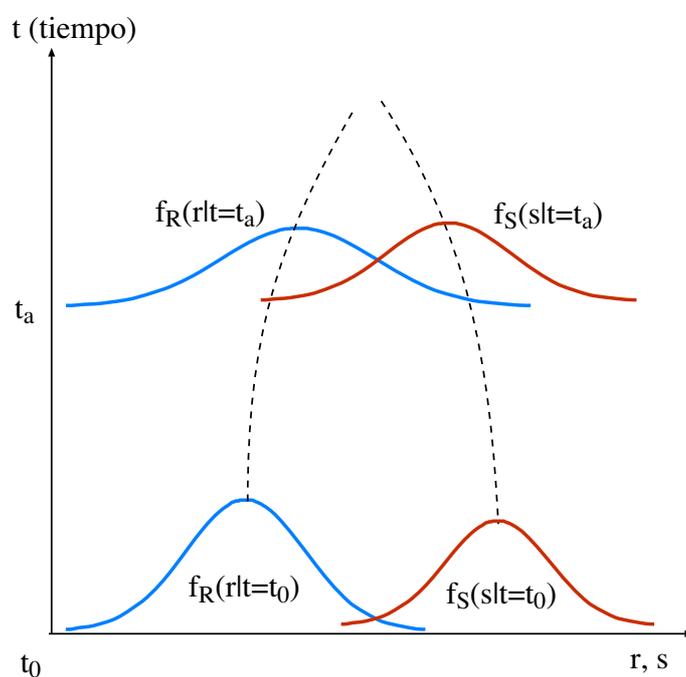


Figura 1.5: Esquema del problema de la fiabilidad en la escala temporal.

Lo mismo ocurre con las demás variables que intervienen (variables de proyecto), tales como resistencias, geometrías, etc. Tienen unos niveles de incertidumbre que pueden describirse en términos probabilistas mediante sus respectivas funciones de densidad.

Considérese que todas las variables con cierto nivel de incertidumbre, se pueden reducir a dos variables aleatorias asociadas a la resistencia R y a los esfuerzos S . Cuyas funciones de densidad f_s y f_r son conocidas a partir de las funciones de densidad de las variables de proyecto. En general, las cargas que actúan en una estructura varían con el tiempo, tienden a aumentar de forma fluctuante, y por tanto la función de densidad asociada a los esfuerzos f_s también cambiará. Lo mismo ocurre con las resistencias, debido al deterioro la resistencia tiende a disminuir con el tiempo, aunque de forma regular. Esto implica que las funciones de densidad f_s y f_r se ensanchen en el tiempo aumentando su incertidumbre y que se acerquen sus valores medios (véase la figura 1.5).

En la mayoría de las situaciones lo que se hace es suponer que las resistencias y sobrecargas son constantes en el tiempo. Por tanto, y dado que las sobrecargas suelen fluctuar, interesará utilizar la máxima sobrecarga esperada en la vida útil de la obra. Esta aproximación no es útil cuando se tiene más de una carga o cuando la resistencia no es constante en el tiempo.

1.4.2. Problema básico en fiabilidad

Una vez que se tienen las funciones de densidad de la resistencia R y de los esfuerzos S , suponiendo que son invariables en el tiempo, se considera que se produce fallo, o superación

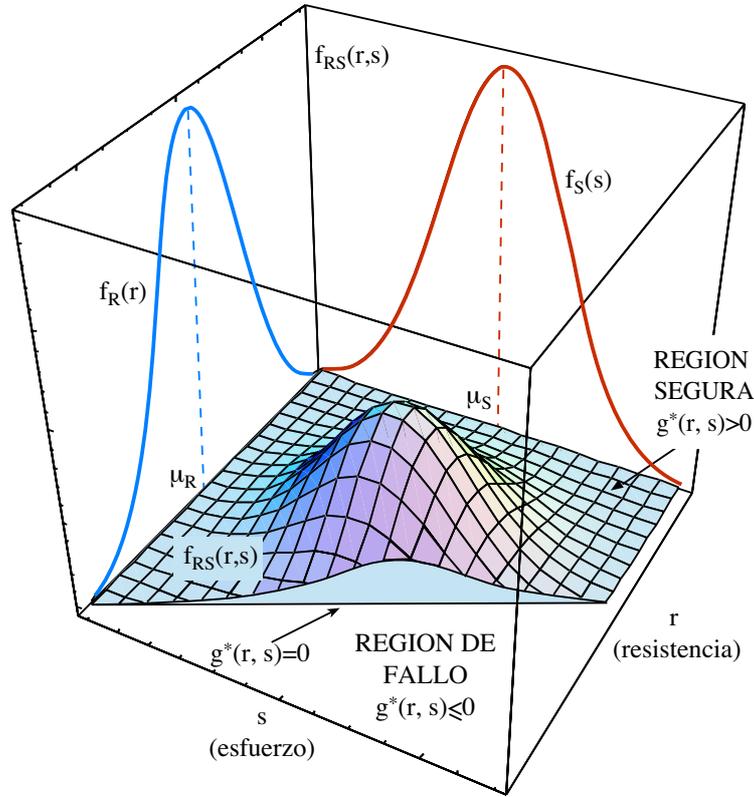


Figura 1.6: Ilustración gráfica de la función de densidad conjunta $f_{RS}(r, s)$, de las funciones de distribución marginales $f_R(r)$ y $f_S(s)$ y del dominio de rotura o fallo D .

del estado límite cuando la resistencia R es menor que el esfuerzo actuante S . Entonces, la probabilidad de fallo se puede determinar de cualquiera de las formas siguientes:

$$p_f = P(R \leq S) \quad (1.28)$$

$$= P(R - S \leq 0) \quad (1.29)$$

$$= P\left(\frac{R}{S} \leq 1\right) = \quad (1.30)$$

$$= P(\log R - \log S \leq 0) \quad (1.31)$$

$$= P(g^*(R, S) \leq 0) \quad (1.32)$$

donde la ecuación (1.32) es la ecuación de estado límite, y es igual a la expresión (1.3) particularizada para el caso de que se reduzca el problema global a resistencias y esfuerzos, y se iguale el coeficiente de seguridad global a $F = 1$.

Por tanto la probabilidad de fallo de la estructura en este caso es igual a la probabilidad de superación del estado límite.

En la figura 1.6 se muestran la función de densidad conjunta $f_{RS}(r, s)$ de las variables R y S , y sus correspondientes funciones de densidad marginales. En el caso de que ambas

variables sean independientes la función de densidad conjunta se obtendrá como producto de las marginales ($f_{RS}(r, s) = f_R(r)f_S(s)$). Las ecuaciones (1.28)-(1.32) se representan mediante el dominio D de la figura, de tal forma que la probabilidad de fallo será:

$$p_f = P(g^*(R, S) \leq 0) = \int_D \int f_{RS}(r, s) dr ds = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^s f_{RS}(r, s) dr ds \quad (1.33)$$

que representa el volumen encerrado por la función de densidad conjunta en el dominio de fallo. En el caso de que las variables sean independientes,

$$p_f = P(g^*(R, S) \leq 0) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^s f_R(r) dr \right) f_S(s) ds. \quad (1.34)$$

En la figura 1.7(a) están representadas las funciones de densidad marginales de R y S .

Nótese que la integral en R de la ecuación (1.34) es la definición de su función de densidad particularizada para el valor $r = s$, por tanto se puede reescribir la ecuación en la forma:

$$p_f = \int_{-\infty}^{\infty} F_R(s) f_S(s) ds. \quad (1.35)$$

De esta forma la probabilidad de fallo está expresada sólo en función de la resistencia, con lo que se reduce el orden de integración en una dimensión. Esta última ecuación se conoce como integral de ‘convolución’ y su significado físico es muy claro (véase la figura 1.7(b)). El término $F_R(s)$ representa la probabilidad de que la resistencia R sea menor o igual que el esfuerzo s , mientras que $f_S(s)$ representa la probabilidad de que el esfuerzo S sea igual a s .

Si se expresa la probabilidad de fallo en función de la resistencia r , la ecuación (1.34) queda en la forma (véase la figura 1.7(d)):

$$p_f = \int_{-\infty}^{\infty} [1 - F_S(r)] f_R(r) dr. \quad (1.36)$$

donde el término $1 - F_S(r)$ es la probabilidad de que el esfuerzo s sea mayor que la resistencia r , y $f_R(r)$ representa la probabilidad de que la resistencia R tome el valor r . En la figura 1.7(c) se da la interpretación gráfica de la probabilidad de fallo, en la que se representa la función de densidad de fallo.

Ejemplo ilustrativo 1.2 (Caso especial de variables normales). La solución analítica de la integral de convolución es posible en un número reducido de casos. El más notable es aquel en el que las variables tienen una distribución normal de medias μ_R y μ_S y varianzas σ_R^2 y σ_S^2 , respectivamente. Siguiendo las reglas para sustracción de normales se puede representar el margen de seguridad $Z = R - S$ (ecuaciones (1.21) y (1.29)) como una variable normal $Z \sim N(\mu_Z, \sigma_Z^2)$ en la que:

$$\mu_Z = \mu_R - \mu_S \quad (1.37)$$

$$\sigma_Z^2 = \sigma_R^2 + \sigma_S^2 \quad (1.38)$$

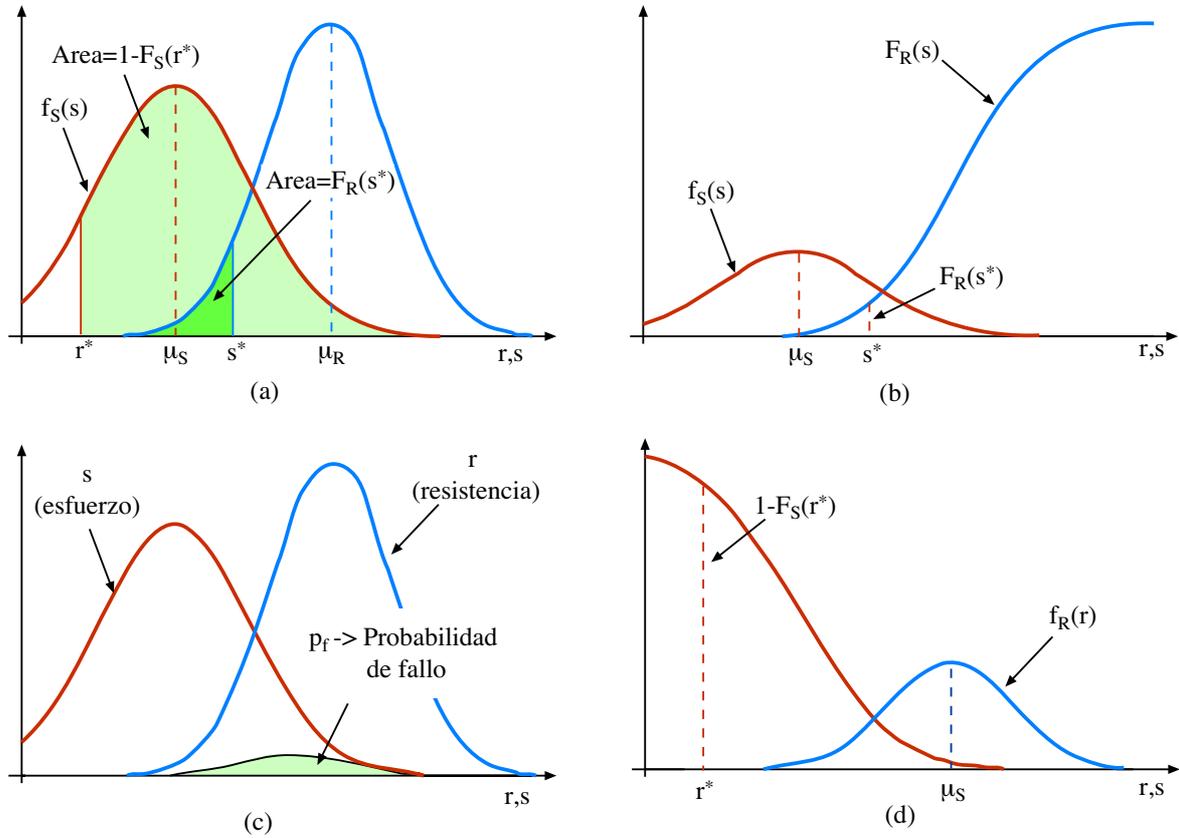


Figura 1.7: Representación gráfica de las funciones de densidad marginales, funciones de distribución y probabilidad de fallo del problema básico de la fiabilidad.

La ecuación (1.29) pasa a ser:

$$p_f = P(R - S \leq 0) = P(Z \leq 0) = \Phi(Z) = \Phi\left(\frac{0 - \mu_Z}{\sigma_Z}\right) \quad (1.39)$$

donde $\Phi(\cdot)$ es la función de distribución de la variable $N(0,1)$. Usando (1.37) y (1.39) se llega a (Cornell [50]):

$$p_f = \Phi\left(\frac{0 - (\mu_R - \mu_S)}{(\sigma_R^2 + \sigma_S^2)^{1/2}}\right) = \Phi(-\beta) \quad (1.40)$$

donde $\beta = \mu_Z/\sigma_Z$ es el índice de fiabilidad .

■

1.4.3. Coeficientes de seguridad y valores característicos

Las medidas tradicionales de fiabilidad revisadas en las subsecciones anteriores, se pueden relacionar con la probabilidad de superación de estado límite o probabilidad de fallo y se

puede demostrar analíticamente para el caso del ejemplo ilustrativo 1.2.

Considérese el coeficiente de seguridad central λ_0 definido como

$$\lambda_0 = \frac{\mu_R}{\mu_S}. \quad (1.41)$$

Esta definición no se corresponde con la que comúnmente se utiliza, normalmente se compara un valor inferior de la resistencia, con un valor superior del esfuerzo. Estos valores se conocen como ‘característicos’, y no son más que un cuantil determinado.

Para el caso de la resistencia, el valor característico se suele tomar como el cuantil de orden $\alpha = 0,05$, de tal forma que el valor de la resistencia r_k para la cual sólo hay una probabilidad del 5% de obtener un valor inferior será:

$$r_k = \mu_R(1 - k_R v_R) \quad (1.42)$$

donde $v_R = \sigma_R/\mu_R$ es el coeficiente de variación de la resistencia, y k_R es una constante que se obtiene como:

$$\alpha = \Phi\left(\frac{r_k - \mu_R}{\sigma_R}\right) = \Phi(-k_R); \quad k_R = -\Phi^{-1}(\alpha) = -\Phi^{-1}(0,05) \quad (1.43)$$

Nótese que el signo de k_R resulta de esta forma positivo. De la ecuación (1.43) operando con el término

$$\frac{r_k - \mu_R}{\sigma_R} = -k_R \quad (1.44)$$

se llega a la ecuación (1.42) (véase la figura 1.8).

Análogamente para el caso de los esfuerzos, pero teniendo en cuenta que ahora se está en el lado derecho de la distribución (véase la figura 1.8). El valor del esfuerzo característico (s_k) en este caso será el valor del esfuerzo tal que la probabilidad de tener un esfuerzo mayor sea del $\alpha\%$, igualmente, se suele utilizar un valor de $\alpha = 0,95$:

$$s_k = \mu_S(1 + k_S v_S) \quad (1.45)$$

donde $v_S = \sigma_S/\mu_S$ es el coeficiente de variación del efecto de las cargas, y k_S es una constante que se obtiene como:

$$\alpha = \Phi\left(\frac{s_k - \mu_S}{\sigma_S}\right) = \Phi(k_S); \quad k_S = \Phi^{-1}(\alpha) = \Phi^{-1}(0,95) \quad (1.46)$$

De la ecuación (1.46) operando con el término

$$\frac{s_k - \mu_S}{\sigma_S} = k_S \quad (1.47)$$

se llega a la ecuación (1.45).

Utilizando los valores característicos podemos definir el coeficiente de seguridad característico λ_k como:

$$\lambda_k = \frac{r_k}{s_k} \quad (1.48)$$

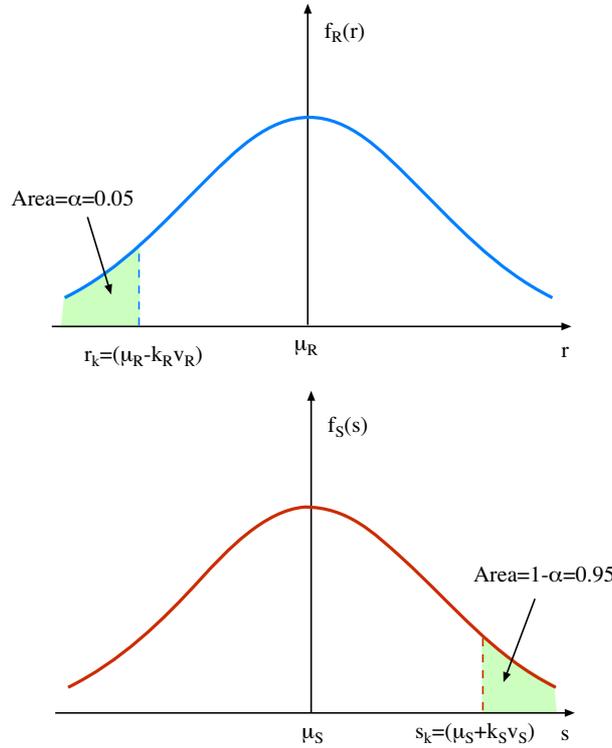


Figura 1.8: Definición de los valores característicos para las resistencias R y los esfuerzos S .

Ahora se está en condiciones de dar la relación entre los coeficientes de seguridad ‘central’, ‘característico’ y la probabilidad de fallo p_f . Esta relación existe independientemente de las distribuciones de las variables pero la expresión analítica sólo está disponible para unos casos muy concretos. Así, para el caso de variables normales con el que se ha estado trabajando se tendrá, partiendo de la ecuación (1.40) y dividiendo por μ_S :

$$p_f = \Phi \left(\frac{0 - (\mu_R - \mu_S)}{(v_R^2 \mu_R^2 + v_S^2 \mu_S^2)^{1/2}} \right) = \Phi \left(\frac{0 - (\lambda_0 - 1)}{(v_R^2 \lambda_0^2 + v_S^2)^{1/2}} \right) = \Phi(-\beta) \quad (1.49)$$

donde λ_0 se da en (1.41) y β es el índice de fiabilidad. Por tanto se llega a:

$$\lambda_0 = \frac{1 + \beta (v_R^2 + v_S^2 - \beta^2 v_R^2 v_S^2)^{1/2}}{1 - \beta^2 v_R^2}. \quad (1.50)$$

De (1.48), (1.42) y (1.45) se obtiene:

$$\lambda_k = \frac{\mu_R(1 - k_R v_R)}{\mu_S(1 + k_S v_S)} = \frac{1 - k_R v_R}{1 + k_S v_S} \lambda_0 \quad (1.51)$$

de tal forma que se ha logrado relacionar las medidas deterministas de la fiabilidad con medidas probabilistas, en función de los coeficientes de variación de las variables, que indican

claramente que hay una relación entre los coeficientes y la variabilidad de las variables. De ahí que haya que ser muy cuidadoso en la selección de los coeficientes de seguridad para tratar de evitar el tratamiento estadístico del problema. Este aspecto será muy importante para la calibración de códigos y para el desarrollo del método combinado con coeficientes de seguridad y probabilidades de fallo.

1.4.4. Problema genérico en fiabilidad

En la mayoría de los problemas a los que se enfrentan los ingenieros hoy en día, no es posible reducir el problema a dos variables o términos R y S , ya que puede haber relaciones de dependencia entre las variables, los términos que afecten a ambos miembros, etc. Por tanto, se ha de trabajar con el vector de variables de proyecto (X_1, X_2, \dots, X_n) que constituyen las variables de diseño y factores de proyecto tales como (resistencias, sobrecargas, dimensiones, etc.).

En lo relativo a los términos R y S han de ser sustituidos por las funciones $h_R(x_1, x_2, \dots, x_n)$ y $h_S(x_1, x_2, \dots, x_n)$ que son las magnitudes que favorecen la seguridad (términos asociados a las resistencias) frente al estado límite considerado, y la superación del mismo (cargas que actúan), respectivamente.

Pero incluso se puede generalizar más, de forma que la ecuación de estado límite quede como la ecuación (1.3):

$$g^*(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{h_R(x_1, x_2, \dots, x_n)}{h_S(x_1, x_2, \dots, x_n)} - 1 \geq 0 \quad (1.52)$$

que dividirá el espacio n -dimensional en dos regiones:

$$\begin{aligned} \text{Región segura:} \quad \mathcal{S} &\equiv \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid g^*(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq 0\}, \\ \text{Región de fallo:} \quad \mathcal{F} &\equiv \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid g^*(x_1, x_2, \dots, x_n) < 0\}. \end{aligned} \quad (1.53)$$

Teniendo en cuenta que la función de densidad conjunta de todas las variables de proyecto es:

$$f(\mathbf{x}) = f_{X_1, X_2, \dots, X_n}(x_1, x_2, \dots, x_n; \Theta) \quad (1.54)$$

donde Θ es un vector paramétrico que se definirá más adelante y que contendrá por ejemplo los parámetros estadísticos de las distribuciones de las variables, datos perfectamente definidos dentro del programa, etc., la probabilidad de fallo se obtiene mediante la expresión:

$$p_f(\Theta) = \int_{g^*(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq 0} f_{X_1, X_2, \dots, X_n}(x_1, x_2, \dots, x_n; \Theta) dx_1 dx_2 \dots dx_n. \quad (1.55)$$

Observese que es una probabilidad condicionada, ya que se trata de una estimación puntual de la probabilidad de fallo para unos valores supuestos del vector Θ , pero éste puede estar constituido a su vez por variables aleatorias. Con lo cual el problema quedaría perfectamente definido tomando el valor esperado de la probabilidad de fallo (Der Kiureghian, [57]):

$$p_f = E[p_f(\Theta)] = \int_{\Theta} p_f(\Theta) f_{\Xi}(\Theta) d\Theta \quad (1.56)$$

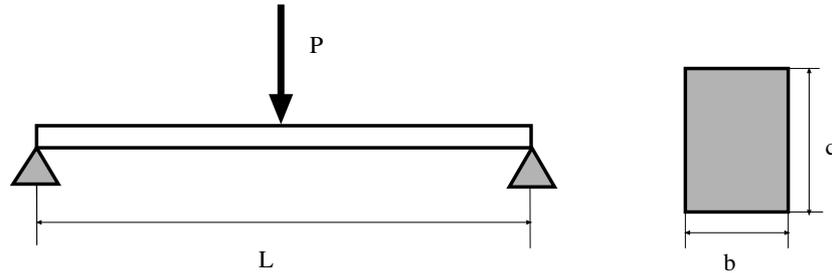


Figura 1.9: Viga simplemente apoyada y sección transversal de la misma.

donde $E[\cdot]$ es el valor esperado, y $f_{\Xi}(\Theta)$ es la función de densidad conjunta del vector paramétrico Θ .

Ejemplo ilustrativo 1.3 (Viga biapoyada con variables logarítmico normales).

Considérese la viga simplemente apoyada de la figura 1.9, donde se aplica una carga P en el centro del vano, L es la longitud de la viga, y b y c las dimensiones de su sección transversal.

Para analizar el problema se considera el siguiente conjunto de variables:

■ **Variables aleatorias:**

- P : Máximo valor de la carga durante su vida útil.
- s : Resistencia actual.
- L : Longitud actual.
- b : Espesor actual.
- c : Canto actual.

Los valores actuales de las variables son los que tiene la viga una vez que se ha construido, y que no tienen por qué ser iguales a los esperados.

■ **Variables de diseño:**

- P_0 : Carga fijada por el código para este tipo de estructura.
- s_0 : Resistencia considerada según los códigos.
- L_0 : Longitud de diseño, fijada por el proyectista.
- b_0 : Espesor fijado por el proyectista.
- c_0 : Canto fijado por el proyectista.
- γ : Coeficiente de seguridad mayorador de la carga P .
- ϕ : Coeficiente minorador de la resistencia s .

Estos valores son los deseados por el proyectista, en el caso de las dimensiones, y que pueden diferir de los actuales ya que puede haber errores constructivos. Los valores fijados por el código, se referirán a valores característicos.

Los valores de las variables L, b y c , aleatorias, tendrán como valores medios o más probables (dependiendo de la distribución empleada) los valores de las variables fijas L_0, b_0 y c_0 .

En el ejemplo que nos ocupa, se tratará de calcular las dimensiones que ha de tener una viga de una resistencia determinada, para que salvando una luz dada L_0 pueda soportar la carga a la que va estar sometida con un margen de seguridad razonable.

El diseño clásico, utilizando coeficientes de seguridad plantearía la siguiente ecuación de estado límite de acuerdo con (1.10):

$$\phi s_0 = \frac{M}{W_0} = \frac{\gamma P_0 L_0 / 4}{\frac{I_0}{c_0 / 2}} = \frac{3\gamma P_0 L_0}{2b_0 c_0^2}, \quad (1.57)$$

donde W_0 e I_0 son el momento resistente y el momento de inercia, respectivamente, asociados a b_0 y c_0 .

La región de fallo del problema (1.52) asociada a este problema se obtiene teniendo en cuenta que la máxima tensión s_{max} a la que va estar sometida la viga por efecto de la carga va a ser:

$$s_{max} = \frac{3PL}{2bc^2}, \quad (1.58)$$

el sistema fallará por tanto si $s_{max} \geq s$. Por tanto la región de fallo será:

$$\frac{3PL}{2bc^2} \geq s, \quad (1.59)$$

es decir

$$\begin{aligned} \text{Región segura:} & \quad s - (3PL)/(2bc^2) > 0, \\ \text{Región de fallo:} & \quad s - (3PL)/(2bc^2) \leq 0. \end{aligned} \quad (1.60)$$

Suponiendo que las variables que intervienen siguen distribuciones logarítmico normales:

$$\begin{aligned} \log P & \sim N(\mu_P, \sigma_P^2), \\ \log s & \sim N(\mu_s, \sigma_s^2), \\ \log L & \sim N(\mu_L, \sigma_L^2), \\ \log b & \sim N(\mu_b, \sigma_b^2), \\ \log c & \sim N(\mu_c, \sigma_c^2). \end{aligned}$$

cuyos valores numéricos se presentan en la tabla 1.1, se puede obtener la probabilidad de fallo exacta asociada al diseño clásico sin más que utilizar las propiedades de estas distribuciones, integrando en la región de fallo definida por la ecuación (1.60):

$$\begin{aligned} p_f & = Prob[s_{max} \geq s] = Prob\left[s - \frac{3PL}{2bc^2} \leq 0\right] = Prob\left[-\frac{3PL}{2bc^2s} \leq 1\right] \\ & = Prob\left[-\log P + \log s - \log L + \log b + 2\log c + \log \frac{2}{3} \leq 0\right] \\ & = F N\left(-\mu_P + \mu_s - \mu_L + \mu_b + 2\mu_c + \log \frac{2}{3}, \sigma_P^2 + \sigma_s^2 + \sigma_L^2 + \sigma_b^2 + 4\sigma_c^2\right) \quad (0) \end{aligned}$$

Cuadro 1.1: Medias y desviaciones estándar de los logaritmos de las 5 variables aleatorias que intervienen en el ejemplo computacional 1.3.

Variable	Media	Desviación estándar
P	$\mu_P = \log(400000) = 12,8992$	$\sigma_P = 0,257984$
s	$\mu_s = \log(25000000) = 17,0344$	$\sigma_s = 0,085172$
L	$\mu_L = \log(10) = 2,30259$	$\sigma_L = 0,023026$
b	$\mu_b = \log(0,576) = -0,551648$	$\sigma_b = 0,011033$
c	$\mu_c = \log(1) = 0$	$\sigma_c = 0,011033$

$$= \Phi \left[\frac{-\log \frac{2}{3} + \mu_P - \mu_s + \mu_L - \mu_b - 2\mu_c}{\sqrt{\sigma_P^2 + \sigma_s^2 + \sigma_L^2 + \sigma_b^2 + 4\sigma_c^2}} \right], \quad (1.61)$$

donde Φ es la función de distribución de la variable normal estándar $N(0, 1)$.

Asumiendo que los valores fijados por el código y por los condicionantes de uso son los siguientes:

$$s_0 = 25Mp; \quad P_0 = 400000N; \quad L_0 = 10m; \quad \gamma = 1,6; \quad \phi = 1/1,5.$$

Entonces, de acuerdo con la expresión (1.57) se llega a la conclusión de que nuestro diseño ha de cumplir

$$b_0 c_0^2 = 0,576. \quad (1.62)$$

El diseñador es libre de elegir entre cualquier par de valores b y c que cumplan la condición (1.62). Por ejemplo, $b_0 = 0,576m$ y $c_0 = 1,0m$.

De acuerdo con la expresión (1.61) la probabilidad de fallo asociada a este diseño clásico es

$$p_f = \Phi(-\beta) = \Phi(-3,19785) = 0,000692289.$$

■

Capítulo 2

Métodos para Determinar la Fiabilidad

2.1. Introducción

En el capítulo 1 se han revisado los principios básicos de la fiabilidad estructural. Desde los trabajos pioneros de Freudenthal [82] en la década de los cincuenta, en los que comenzó a introducir los conceptos estadísticos para calcular la probabilidad de fallo, se han desarrollado metodologías que nos permiten dividir los métodos para tratar los problemas relativos a la fiabilidad en varios niveles:

1. NIVEL 1: Se seleccionan coeficientes de seguridad parciales para cada una de las variables (cargas, resistencias, etc.). Es el método clásico y el más utilizado en los códigos actuales.
2. NIVEL 2: Alternativamente se puede obtener la probabilidad de fallo, p_f , que puede calcularse usando la función de densidad conjunta $f(\mathbf{x}) = f_{X_1, X_2, \dots, X_n}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ de todas las variables que intervienen mediante la expresión:

$$p_f = \int_{g(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq 0} f_{X_1, X_2, \dots, X_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n. \quad (2.1)$$

El problema es que la integral normalmente es difícil de calcular, debido a dos razones principales: (a) lo complicado de la función de densidad $f(\mathbf{x})$, y (b) la complejidad de la región de fallo $g(\mathbf{x}) \leq 0$. Por tanto, se han de utilizar métodos aproximados, que se basan en aproximaciones de la función de densidad $f_{X_1, X_2, \dots, X_n}(x_1, x_2, \dots, x_n)$, de la región de fallo o ecuación de estado límite $g(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq 0$, o de ambas. A este nivel, se utiliza una aproximación de la distribución de la función de probabilidad usando los dos primeros momentos de la función de distribución conjunta.

3. NIVEL 3: Para el cálculo de la probabilidad de fallo se utiliza la función de densidad conjunta global, y se trata de calcular la probabilidad de fallo exacta. Estos métodos requieren fórmulas especiales de integración y metodologías específicas.

Cuadro 2.1: Jerarquía de las medidas de fiabilidad estructural.

Nivel	Métodos de cálculo	Distribuciones estadísticas	Ecuaciones de estado límite	Incertidumbre asociada	Resultados
1:	Calibración de códigos usando métodos de nivel 2 o 3	No se usan	Ecuaciones lineales usualmente	Factores arbitrarios	Coeffic. parciales
2: Momentos de segundo orden	Álgebra de segundo orden	Sólo distribuciones normales	Lineales o aprox. lineales	Puede incluirse como distribuciones normales	Probab. de fallo
3: Métodos exactos	Transformaciones	Distribuciones normales equivalentes	Lineales o aproximadamente lineales	Puede incluirse	Probab. de fallo
	Integración numérica y simulación	Cualesquiera	Cualesquiera	variables aleatorias	
4: Métodos de decisión					Mínimo coste o máximo beneficio (RBO)

En la tabla 2.1 se presenta un esquema detallado de las metodologías existentes.

Los métodos de nivel 2 para aproximar la integral (2.1) utilizan los dos primeros momentos de las distribuciones de las variables que intervienen en el caso de que estén incorrelacionadas, en caso de que haya correlación entre las variables, primeramente se transforman en variables independientes y posteriormente se trabaja con los dos primeros momentos de las variables resultantes, con lo cual se trabaja con variables normales independientes. Se emplea una aproximación lineal de la región de fallo (FOSM ‘First Order Second Moment’).

Los trabajos de Mayer [118], Freudenthal [82], Rzhnitsyn [144] y Basler [12] contenían conceptos asociados con los dos primeros momentos de las distribuciones. Pero no fue hasta los trabajos de Cornell [50] cuando la metodología se asentó y cobró la relevancia que merecía.

Los ‘Métodos de Fiabilidad de Primer Orden’ (FORM ‘First Order Reliability Methods’), usan también aproximaciones lineales de las ecuaciones de estado límite $g(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq 0$ pero trabajan con las funciones de densidad exactas de las variables que intervienen, surgieron en el campo de la fiabilidad estructural con Freudenthal [82] en 1956, y han sido ampliados por Hasofer y Lind [91], Rackwitz y Flessler [136], Hohenbichler y Rackwitz [94], Ditlevsen ([64], etc.

Los métodos de segundo orden (SORM ‘Second Order Reliability Methods’) utilizan un desarrollo en serie de Taylor para aproximar las regiones de fallo (véase, por ejemplo, Davies [54], Field [77], Breitung [22], Tvedt [162, 163], Der Kiureghian et al. [60], Katsuki y Frangopol [100], Koyluoglu y Nielsen [104], Cai y Elishakoff (1994), Papadimitriou [130] o Zhao y Ono [176]). Para una completa descripción de estos métodos y algunos ejemplos ilustrativos véase Ditlevsen y Madsen [67] y Madsen, Krenk y Lind [114]. Estos métodos han demostrado dar resultados muy precisos y son mucho más eficientes que las técnicas de

simulación de Monte Carlo para estimar percentiles extremos (véase, por ejemplo, Wirsching y Wu [170], o Haskin, Staple y Ding [90]).

Una alternativa muy extendida es tratar el problema mediante simulación ponderada (véase por ejemplo, Siegmund [149], Rubinstein [143], Zhang [175], o Givens y Raftery [88]). Estas técnicas pueden usarse para disminuir el tiempo y número de simulaciones con respecto al método básico de Monte Carlo (véase Hesterberg [92]).

2.2. Problema de las colas

El lector debe tener presente la problemática que surge en todas estas metodologías cuando las probabilidades de fallo son muy pequeñas, que es lo normal en el análisis de la fiabilidad de estructuras. En estos casos se dice que se está tratando con las colas de las distribuciones que es bien sabido son muy sensibles al modelo supuesto (véase Galambos [84] y Castillo [27]). En otras palabras, la probabilidad de fallo es extremadamente dependiente de la cola de las distribuciones. Dado que siempre se trata con problemas con muy pequeñas probabilidades de fallo, se necesitan métodos adecuados de simulación o cálculo (la simulación directa con Monte Carlo es muy ineficiente). Algunos de ellos se pueden estudiar en Castillo, Solares y Gómez [43, 42, 44], Wirsching y Wu [170] y Wu, Burnside y Cruse [174]).

2.3. Métodos de integración

La solución analítica de la integral de convolución (1.35) o de la integral (2.1) es sólo posible en un número muy reducido de situaciones. Por tanto, en la mayoría de los casos se precisa la integración numérica. La aproximación más simple utiliza la regla trapezoidal, que ha dado resultados bastante aceptables, principalmente porque la infravaloración de la integral en torno a los valores medios de las variables se compensa por la sobrestimación en el dominio de integración restante (Dalhquist y Björck, [53]). Metodologías mucho más refinadas, tales como la regla de Simpson, o fórmulas de cuadratura como Gauss-Laguerre, Gauss-Hermite, etc. pueden ser más apropiados (véase Davis y Rabinowitz, [55]).

El problema de la integración numérica es que el coste computacional y la imprecisión aumentan considerablemente con la dimensión del problema, de tal forma que no han tenido un papel predominante en la determinación de la fiabilidad y se han desarrollado métodos alternativos.

2.4. Métodos de simulación

Una alternativa para el cálculo de la probabilidad de fallo definida por la integral (2.1) son los métodos de simulación. Consisten, como su propio nombre indica, en simular artificialmente un gran número de realizaciones de las variables aleatorias $\hat{\mathbf{x}} = \hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n$ (experimentos), y comprobar si se produce superación del estado límite ‘fallo’ ($g(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n) \leq 0$) o si no se produce ($g(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n) > 0$). La probabilidad de fallo se puede aproximar mediante la expresión:

$$p_f \approx \frac{n(g(\hat{\mathbf{x}}) \leq 0)}{N} \quad (2.2)$$

donde $n(g(\hat{\mathbf{x}}) \leq 0)$ es el número de experimentos n en los que $g(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n) \leq 0$ (fallos) y N es el número total de realizaciones.

El procedimiento descrito anteriormente es el más sencillo de realizar con esta metodología, y se conoce como método de Monte Carlo ‘normal’, sin embargo para mejorar los resultados han surgido procedimientos alternativos que han dado como resultado metodologías muy eficientes. Para poder aplicar estas técnicas a problemas de fiabilidad estructural es necesario:

1. Desarrollar metodologías sistemáticas para generar vectores aleatorios para las variables básicas o de proyecto \mathbf{x} .
2. Seleccionar una estrategia de simulación adecuada.
3. Desarrollar técnicas para evaluar la función $g(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n)$.
4. Seleccionar el número de experimentos a realizar para obtener una estimación aceptable de la probabilidad de fallo p_f .

No se va a entrar en detalle sobre los puntos 1, 3 y 4, información amplia y detallada sobre esos temas aplicados a la fiabilidad estructural se puede encontrar en Melchers [121] y en Box y Muller [21]. Pero sí se va a comentar la selección de la estrategia de simulación, que es el punto en el que los métodos de simulación más han mejorado, y que los ha convertido en una herramienta muy útil en el campo de la fiabilidad.

2.4.1. Simulación ponderada

Partiendo de la metodología básica de la simulación de Monte Carlo, vista en la sección anterior, en el año 1983 se publicaron dos artículos (Harbitz [89] y Shinozuka [148]) en los que se desarrollaban sendas técnicas basadas en conceptos de simulación, que hicieron que la comunidad científica que trataba los temas de fiabilidad, aceptara la aplicabilidad práctica de las mismas. Su principal ventaja con respecto a otras metodologías es que proporcionaban de forma eficiente y simultánea una estimación de la probabilidad de fallo y del error. Además de permitir trabajar con funciones de estado límite no diferenciables.

Se denominaron ‘exactas’ en el sentido de que tienden al resultado exacto cuando N (el número de realizaciones) tiende a infinito. El procedimiento más sencillo de implementación es el siguiente:

$$\begin{aligned} p_f &= \int_{g(\mathbf{x}) \leq 0} f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_{g(\mathbf{x}) \leq 0} f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) \frac{\psi(\mathbf{x})}{\psi(\mathbf{x})} d\mathbf{x} \\ &\approx \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \ell(g(\mathbf{x}_i)) \frac{f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}_i)}{\psi(\mathbf{x}_i)} \end{aligned} \quad (2.3)$$

donde $\ell(g(\mathbf{x}_i))$ es la función indicadora para el dominio de fallo, y $\psi(\mathbf{x}_i)$ es la función de ponderación seleccionada. Se elige de forma que la región de interés, en el entorno de la zona de rotura, sea la zona más importante y predominante.

Actualmente se han desarrollado sofisticadas estrategias de simulación que pueden sustituir a los métodos más utilizados en la actualidad (FORM y SORM, que se tratarán en las secciones siguientes) con un pequeño aumento del tiempo de computación.

Para obtener más detalles sobre este método y los tipos de funciones de ponderación véase Melchers [120, 121], Engelund y Rackwitz [74] y Melchers y Li [122]. Para lectores interesados en la búsqueda secuencial o en técnicas adaptativas de mejora del método consultar Melchers [119], Harbitz [89], Bucher [23], Karamchandani et al. [98], Der Kiureghian y Dakessian [58].

Para el estudio de sensibilidad mediante técnicas de simulación, es decir, como afectan los parámetros o variables en la probabilidad de fallo véase Rubinstein [143], Melchers [120] y Karamchandani y Cornell [99].

2.4.2. Simulación direccional

Los métodos de simulación vistos hasta ahora han sido formulados en el sistema cartesiano exclusivamente. La idea de trabajar en coordenadas polares surgió de los trabajos de Deák (1980) para tratar de evaluar la función de distribución normal multivariada. Esto llevo a la simulación en el espacio multinormal estándar \mathbf{y} en coordenadas polares, a lo que se llamó ‘simulación direccional’ (Ditlevsen et al [68]).

Dado un vector \mathbf{Z} en el espacio Gaussiano n -dimensional (\mathbf{z}), de tal forma que $\mathbf{Z} = R\mathbf{A}$ ($R \geq 0$), donde \mathbf{A} es un vector compuesto por cosenos directores aleatorios independientes, que representa una dirección en el espacio \mathbf{Z} . El vector \mathbf{A} está uniformemente distribuido sobre la hiperesfera n -dimensional, y R es tal que R^2 sigue una distribución chi-cuadrado con n grados de libertad. Si R es independiente de \mathbf{A} , la integral (2.1) queda (Bjerager [17, 18]):

$$p_f = \int_{\mathbf{a}} P[g(R\mathbf{A}) \leq 0 | \mathbf{A} = \mathbf{a}] f_{\mathbf{A}}(\mathbf{a}) d\mathbf{a} \quad (2.4)$$

donde $f_{\mathbf{A}}(\cdot)$ es función de densidad de \mathbf{A} sobre la hiperesfera unitaria y $g(\cdot) = 0$ es la función de estado límite en el espacio \mathbf{Z} .

El procedimiento de simulación procede generando un vector $\hat{\mathbf{a}}_i$ y calculando el valor de r tal que $g(r\mathbf{A}) = 0$. La probabilidad de fallo de la estimación será:

$$\hat{p}_{f_i} = P[g(r\hat{\mathbf{a}})_i \leq 0] = 1 - \chi_n^2(r) \quad (2.5)$$

donde $\chi_n^2(\cdot)$ es la función de distribución chi-cuadrado con n grados de libertad.

Repetiendo el procedimiento con las N realizaciones permite estimar la probabilidad aproximada como:

$$p_f \approx E(\hat{p}_{f_i}) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \hat{p}_{f_i} \quad (2.6)$$

Esta técnica es especialmente útil con regiones de fallo con mucha curvatura, y se comporta mal con funciones lineales (Engelund y Rackwitz [74]).

Otra alternativa de la simulación direccional es su combinación con el método de ponderación en una determinada dirección (véase Ditlevsen y Bjerager [66]).

2.5. Método basado en los momentos de segundo orden

Una alternativa a los métodos de integración y simulación vistos en las secciones 2.3 y 2.4, respectivamente, son los métodos que tratan de estimar la fiabilidad de un sistema basándose en los dos primeros momentos de la función de densidad de cada una de las variables que intervienen, esto es, la media y la desviación típica. Por tanto cada variable está representada por variables normales cuyas distribuciones quedan perfectamente definidas con los dos primeros momentos.

En el ejemplo ilustrativo 1.2 se mostró que para el caso de dos variables normales de medias μ_R y μ_S y varianzas σ_R^2 y σ_S^2 , respectivamente, su margen de seguridad $G = R - S$ era una variable aleatoria con una distribución normal $G \sim N(\mu_G, \sigma_G^2)$ con la que se puede calcular la probabilidad de fallo p_f como:

$$p_f = P(R - S \leq 0) = P(G \leq 0) = \Phi\left(\frac{0 - \mu_G}{\sigma_G}\right) \quad (2.7)$$

donde $\beta = \mu_G/\sigma_G$ es el índice de fiabilidad.

Evidentemente, la ecuación (2.7) proporciona el valor exacto, ya que tanto R como S están normalmente distribuidas. En el caso de que tengan otras distribuciones se obtiene una probabilidad de fallo ‘nominal’. De hecho, conceptualmente es mejor hablar en términos de ‘índice de fiabilidad’ o ‘seguridad’ β que de probabilidad de fallo.

Las ideas descritas anteriormente se pueden extender al caso de ecuaciones de estado límite con combinaciones lineales de un conjunto de variables aleatorias normales de la forma:

$$G_{\mathbf{X}}(\mathbf{X}) = a_0 + a_1X_1 + a_2X_2 + \dots + a_nX_n \quad (2.8)$$

donde $G_{\mathbf{X}}(\mathbf{X})$ está normalmente distribuida, por lo que se puede calcular su índice de fiabilidad β y su probabilidad de fallo p_f .

Dado que $\sum_{i=1}^n a_iX_i \sim N\left(\sum_{i=1}^n a_i\mu_{X_i}, \sum_{i=1}^n a_i^2\sigma_{X_i}^2\right)$,

$$p_f \leq P\left(\sum_{i=1}^n a_iX_i \leq -a_0\right) = F_{N\left(\sum_{i=1}^n a_i\mu_{X_i}, \sum_{i=1}^n a_i^2\sigma_{X_i}^2\right)}(-a_0) = \Phi\left(\frac{-a_0 - \sum_{i=1}^n a_i\mu_{X_i}}{\sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2\sigma_{X_i}^2}}\right) = \Phi(-\beta), \quad (2.9)$$

donde $F_{N(\cdot)}(x)$ es la función de distribución de la $N\left(\sum_{i=1}^n a_i\mu_{X_i}, \sum_{i=1}^n a_i^2\sigma_{X_i}^2\right)$, y $\Phi(\cdot)$ es la función de distribución de la variable normal estándar $N(0, 1)$.

En el caso de que la ecuación de estado límite $G(\mathbf{X}) = 0$ fuera no lineal, no se podrían calcular sus dos primeros momentos, por lo que se lineariza $G(\mathbf{X}) = 0$ mediante desarrollo en serie de Taylor de primer orden en el entorno del punto \mathbf{x}^* , con lo que se obtiene $G_L(\mathbf{X}) = 0$. Esta aproximación se conoce como método de primer orden (véase la figura 2.1).

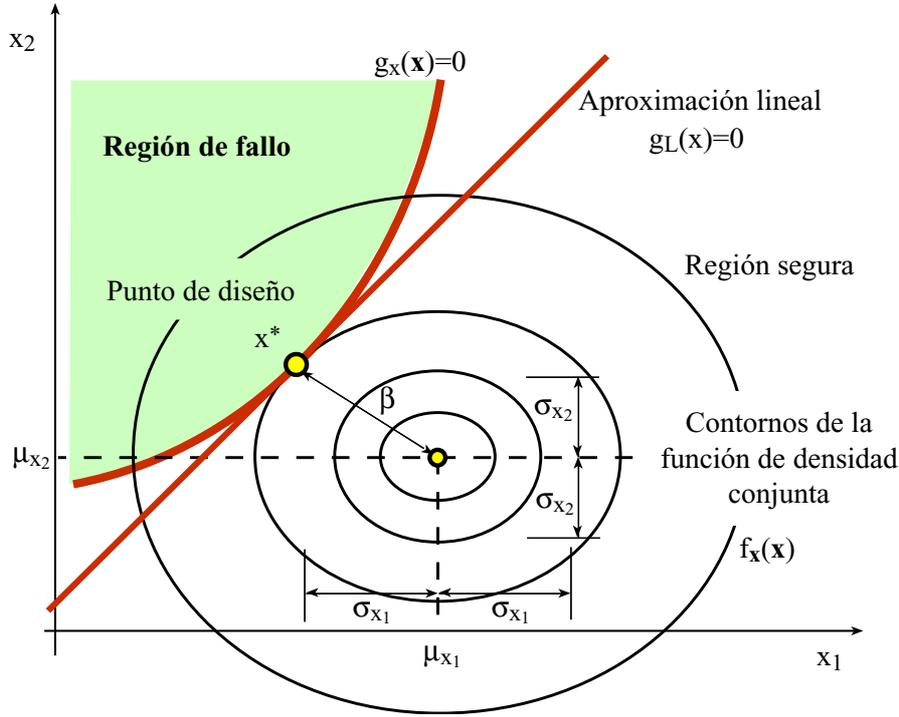


Figura 2.1: Ilustración gráfica de la superficie de estado límite $G_{\mathbf{X}}(\mathbf{X}) = 0$ y su aproximación lineal en el entorno del punto \mathbf{x}^* para el caso bidimensional. Interpretación gráfica del índice de fiabilidad β de Hasofer-Lind.

2.6. Teoría lineal de momentos de segundo orden (FOSM)

2.6.1. Índice de fiabilidad de Hasofer-Lind

En el capítulo 1 en el que se estudiaron las medidas de la fiabilidad estructural, se vió que uno de los problemas que existían era la falta de invarianza de algunas de las metodologías empleadas. Lógicamente, es deseable, que la medida que se utilice para determinar si un sistema es lo suficientemente seguro o no, sea independiente de la definición de la ecuación de estado límite, es decir, que sea invariante. Para solucionar este problema, Hasofer y Lind [91] propusieron una definición invariante del índice de fiabilidad β .

Sea \mathbf{X} un vector que contiene las variables aleatorias que intervienen, $\boldsymbol{\mu}_X$ su vector de medias y $\boldsymbol{\sigma}_X$ su matriz de varianzas covarianzas. La formulación matricial del índice de fiabilidad propuesto por Hasofer y Lind es (véase Ditlevsen [65], Veneciano [165] y Low y Tang [111]):

$$\beta = \underset{\mathbf{x}}{\text{Mínimo}} \sqrt{(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}_X)^T \boldsymbol{\sigma}_X^{-1} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}_X)^T} \quad (2.10)$$

sometido a

$$g_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = 0. \quad (2.11)$$

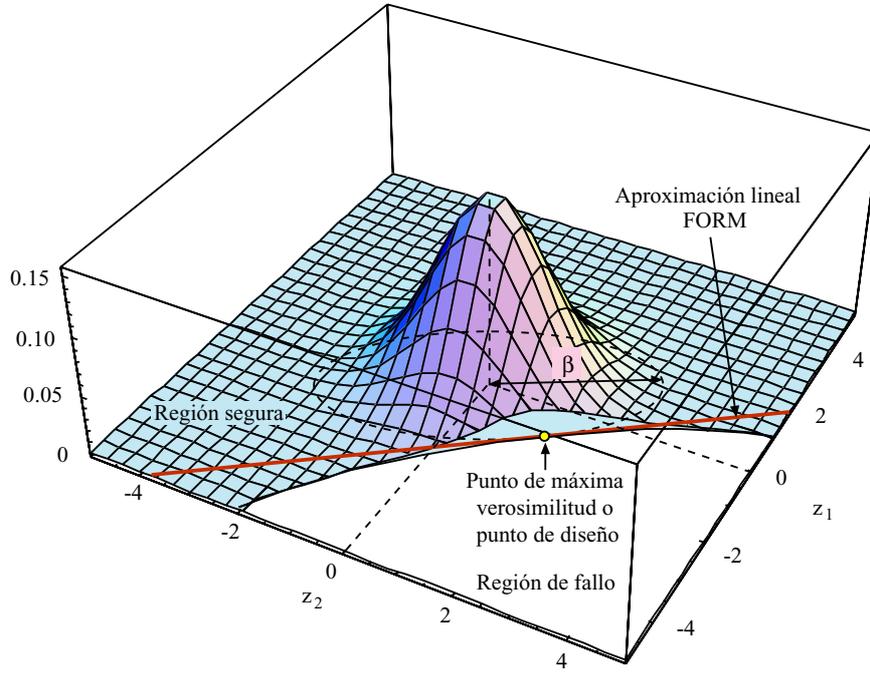


Figura 2.2: Ilustración gráfica de la función de densidad normal estándar bivariada, del índice de fiabilidad de Hasofer-Lind y del 'punto de diseño' o de 'máxima verosimilitud' en el espacio \mathbf{z} .

El valor óptimo de $\mathbf{x} = \mathbf{x}^*$ (véase la figura 2.1) se conoce como 'punto de diseño' o 'punto de máxima verosimilitud', y es el punto dentro de la región de fallo en el que el valor de la función de densidad conjunta de las variables que intervienen $f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{X}})$, que es una función normal multivariada, es máximo. Es decir, es el valor más probable de las variables de proyecto con el que se produce fallo o superación del estado límite.

Se puede obtener una interpretación más intuitiva del índice de fiabilidad. Si se transforman las variables aleatorias \mathbf{X} al espacio normal estándar multivariado \mathbf{Z} de forma que:

$$\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{Z}} = \mathbf{0}, \boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{Z}} = \mathbf{I},$$

donde $\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{Z}}$ es el vector de medias de las nuevas variables, $\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{Z}}$ es la nueva matriz de varianzas-covarianzas, e \mathbf{I} es la matriz identidad. El problema (2.10)-(2.11) se transforma en:

$$\beta = \underset{\mathbf{z}}{\text{Mínimo}} \sqrt{\mathbf{z}^T \mathbf{z}} \quad (2.12)$$

sometido a

$$g_{\mathbf{Z}}(\mathbf{z}) = 0. \quad (2.13)$$

En la figura 2.2 se muestra la interpretación gráfica del índice de fiabilidad en el espacio \mathbf{z} , en la que se comprueba que el índice de fiabilidad es la distancia mínima del origen de coordenadas al punto más próximo de la ecuación de estado límite. El punto de diseño \mathbf{z}^* es el transformado del punto \mathbf{x}^* .

Ejemplo ilustrativo 2.1 (Índice de fiabilidad de Hasofer-Lind para ecuaciones de estado límite lineales). Se ha visto que en caso de ecuaciones de estado límite lineales $G_{\mathbf{X}}(\mathbf{X}) = a_0 + a_1X_1 + a_2X_2 + \dots + a_nX_n$ como en (2.8), el índice de fiabilidad se podía calcular como (2.9):

$$\beta = \left(a_0 + \sum_{i=1}^n a_i \mu_{X_i} \right) / \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2 \sigma_{X_i}^2}. \quad (2.14)$$

Se va a tratar de obtener este resultado resolviendo el problema (2.10)-(2.11) suponiendo que las variables \mathbf{X} son linealmente independientes pero considerando como función objetivo β^2 , ya que la solución será la misma:

$$\beta^2 = \underset{x_i; i=1, \dots, n}{\text{Mínimo}} \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \mu_{X_i})^2}{\sigma_{X_i}^2} = \sum_{i=1}^n z_i^2 \quad (2.15)$$

sometido a

$$\begin{aligned} g_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) &= a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = \\ &= a_0 + a_1(\mu_{X_1} + \sigma_{X_1}z_1) + \dots + a_n(\mu_{X_n} + \sigma_{X_n}z_n) = 0 \end{aligned} \quad (2.16)$$

La función Lagrangiana del problema anterior es:

$$\mathcal{L}(\mathbf{z}, \lambda) = \sum_{i=1}^n z_i^2 + \lambda (a_0 + a_1(\mu_{X_1} + \sigma_{X_1}z_1) + \dots + a_n(\mu_{X_n} + \sigma_{X_n}z_n)) \quad (2.17)$$

donde λ es el multiplicador de Lagrange asociado a la restricción.

Derivando con respecto a las variables \mathbf{z} y λ

$$\frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{z}, \lambda)}{\partial z_i} = 2z_i + \lambda a_i \sigma_{X_i} = 0; \quad i = 1, \dots, n \quad (2.18)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{z}, \lambda)}{\partial \lambda} = a_0 + \sum_{i=1}^n a_i (\mu_{X_i} + \sigma_{X_i} z_i) = 0 \quad (2.19)$$

De la ecuación (2.18) se obtiene

$$z_i = \frac{-\lambda a_i \sigma_{X_i}}{2},$$

sustituyendo estos valores en la ecuación (2.19)

$$a_0 + \sum_{i=1}^n a_i \left(\mu_{X_i} + \sigma_{X_i} \frac{-\lambda a_i \sigma_{X_i}}{2} \right) = 0,$$

y despejando el valor de λ ,

$$\lambda = 2 \frac{\left(a_0 + \sum_{i=1}^n a_i \mu_{X_i} \right)}{\sum_{i=1}^n a_i^2 \sigma_{X_i}^2}.$$

Sustituyendo los valores de z_i y λ en la función objetivo

$$\beta^2 = \sum_{i=1}^n z_i^2 = \sum_{i=1}^n \left(\frac{-\lambda a_i \sigma_{X_i}}{2} \right)^2 = \frac{4\lambda^2}{4} \sum_{i=1}^n a_i^2 \sigma_{X_i}^2 = \frac{\left(a_0 + \sum_{i=1}^n a_i \mu_{X_i} \right)^2}{\sum_{i=1}^n a_i^4 \sigma_{X_i}^4} \sum_{i=1}^n a_i^2 \sigma_{X_i}^2 \quad (2.20)$$

simplificando se llega a la conclusión de que el índice de fiabilidad es:

$$\beta = \frac{a_0 + \sum_{i=1}^n a_i \mu_{X_i}}{\sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2 \sigma_{X_i}^2}} \quad (2.21)$$

expresión que es idéntica a (2.14). ■

2.6.2. Transformación de Hasofer-Lind

El cambio de variable propuesto por Hasofer y Lind, no es esencial para que el método funcione, ahora bien es muy útil porque en el espacio transformado es más fácil calcular el punto de diseño y el índice de fiabilidad. Por lo tanto, un aspecto fundamental en los métodos FOSM es la transformación de las variables normales multivariadas, en variables normales estándar independientes $N(0, 1)$. En el caso de que las variables que intervienen sean independientes se puede utilizar la bien conocida transformación:

$$Z_i = \frac{X_i - \mu_{X_i}}{\sigma_{X_i}}; \forall i = 1, \dots, n. \quad (2.22)$$

En el caso de que las variables estén correlacionadas se puede emplear la transformación ortogonal de variables aleatorias normales.

Transformación ortogonal de variables aleatorias normales

Sea $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ un vector que contiene las variables aleatorias correlacionadas que intervienen en un sistema. Sus valores medios, las varianzas y covarianzas son, respectivamente

$$\boldsymbol{\mu}_X = E(\mathbf{X}) = (E(X_1), E(X_2), \dots, E(X_n)) = (\mu_{X_1}, \mu_{X_2}, \dots, \mu_{X_n}),$$

y

$$\boldsymbol{\sigma}_X = \text{cov}(X_i, X_j) = \sigma_X^2(i, j). \quad (2.23)$$

La matriz de varianzas-covarianzas (2.23) será estrictamente diagonal, si las variables (X_1, X_2, \dots, X_n) están incorrelacionadas, es decir, si son independientes.

El objetivo de la transformación es obtener un vector linealmente independiente \mathbf{U} , y una matriz de transformación \mathbf{B} de forma que

$$\mathbf{U} = \mathbf{B}\mathbf{X} \quad (2.24)$$

Es necesario que la transformación sea ortogonal, de forma que las distancias en ambos espacios \mathbf{X} y \mathbf{U} sean constantes para que el índice de fiabilidad sea el mismo.

Observese, que el vector \mathbf{U} sólo será incorrelacionado si la matriz de varianzas-covarianzas σ_U transformada es diagonal. Ésta, bajo la transformación lineal (2.24) queda como:

$$\sigma_U = \text{cov}(\mathbf{U}, \mathbf{U}^T) = \text{cov}(\mathbf{B}\mathbf{X}, \mathbf{X}^T \mathbf{B}^T) = \quad (2.25)$$

$$= \mathbf{B} \text{cov}(\mathbf{X}, \mathbf{X}^T) \mathbf{B}^T = \mathbf{B} \sigma_X \mathbf{B}^T \quad (2.26)$$

Del análisis matricial, y teniendo en cuenta que en los problemas ingenieriles, la matriz de varianzas-covarianzas es simétrica y definida positiva, se puede descomponer usando la descomposición de Cholesky, con lo que no tienen que calcularse los autovalores y autovectores, así

$$\sigma_X = \mathbf{L}\mathbf{L}^T \quad (2.27)$$

donde \mathbf{L} es una matriz triangular inferior, tal que su inversa $\mathbf{B} = \mathbf{L}^{-1}$ será también triangular inferior y podrá obtenerse fácilmente. Entonces

$$\mathbf{B} \sigma_X \mathbf{B}^T = (\mathbf{B} \mathbf{L}) (\mathbf{L}^T \mathbf{B}^T) = \mathbf{I} \quad (2.28)$$

donde \mathbf{I} es la matriz identidad.

Sustituyendo (2.28) en (2.26) se obtiene

$$\sigma_U = \mathbf{I}. \quad (2.29)$$

El último paso es transformar las variables $\mathbf{U} \sim N(\boldsymbol{\mu}_U, \mathbf{I})$ en el conjunto $\mathbf{Z} \sim N(\mathbf{0}, \mathbf{I}_n)$, para lo cual:

$$\mathbf{Z} = \frac{\mathbf{Z} - \boldsymbol{\mu}_Z}{\mathbf{I}} = \mathbf{B}(\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu}_X) \quad (2.30)$$

Expresión esta última que permite pasar del espacio \mathbf{X} al \mathbf{Z} .

2.6.3. Ecuación de estado límite último

El método FOSM por tanto, lineariza $G_{\mathbf{X}}(\mathbf{X}) = 0$ mediante desarrollo en serie de Taylor de primer orden en el entorno del punto \mathbf{x}^* obtenido, que es el ‘punto de diseño’ en el espacio \mathbf{X} y que se corresponde con el punto \mathbf{z}^* . Además, calcula el índice de fiabilidad β (véase la figura 2.3).

Hay una relación directa entre el punto de diseño \mathbf{z}^* y el índice de fiabilidad β . El vector unitario normal a la ecuación de verificación $g_{\mathbf{Z}}(\mathbf{z}) = 0$ en el punto de diseño viene dado por la expresión:

$$\boldsymbol{\alpha} = \frac{\frac{\partial g_{\mathbf{Z}}}{\partial \mathbf{z}}}{\sqrt{\frac{\partial g_{\mathbf{Z}}}{\partial \mathbf{z}}^T \frac{\partial g_{\mathbf{Z}}}{\partial \mathbf{z}}}} \quad (2.31)$$

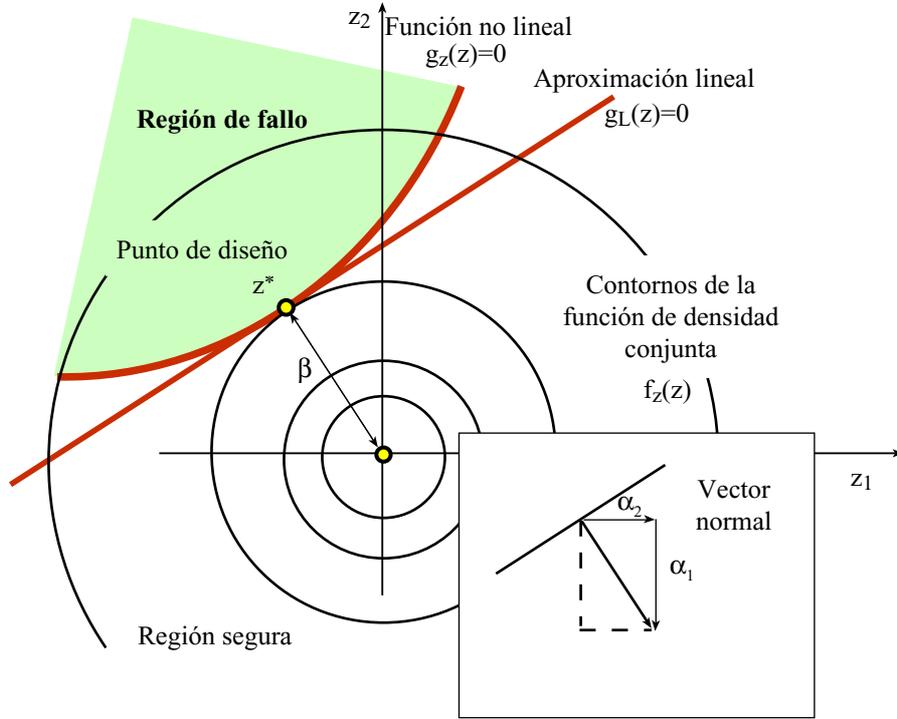


Figura 2.3: Ilustración gráfica del índice de fiabilidad β , de las ecuaciones de estado límite, tanto lineales como no lineales $g_{\mathbf{Z}}(\mathbf{z})$ y de los contornos de la función de densidad normal estándar bivariada.

Con α (véase la figura 2.3) conocido, las coordenadas del punto de diseño son:

$$\mathbf{z}^* = -\alpha\beta \quad (2.32)$$

donde el signo negativo proviene del hecho de que el vector α es positivo en el sentido creciente de $g_{\mathbf{Z}}(\mathbf{z})$.

En el caso de tener una ecuación de estado límite lineal de la forma $G_{\mathbf{X}}(\mathbf{X}) = a_0 + a_1X_1 + a_2X_2 + \dots + a_nX_n$ es relativamente fácil encontrar el punto de fallo en el espacio \mathbf{Z} que verifique (2.32) y (2.12)-(2.13) ya que se conoce de antemano la dirección del vector α . La ecuación de verificación en el espacio \mathbf{Z} queda utilizando (2.22) de la forma:

$$g_{\mathbf{Z}}(\mathbf{z}) = a_0 + a_1(\mu_{X_1} + \sigma_{X_1}z_1) + a_2(\mu_{X_2} + \sigma_{X_2}z_2) + \dots + a_n(\mu_{X_n} + \sigma_{X_n}z_n) \quad (2.33)$$

$$= a_0 + \sum_{i=1}^n a_i\mu_{X_i} + \sum_{i=1}^n a_i\sigma_{X_i}z_i \quad (2.34)$$

$$= b_0 + \sum_{i=1}^n b_i z_i \quad (2.35)$$

donde b_i es el coeficiente i -ésimo del hiperplano transformado de $G_{\mathbf{X}}(\mathbf{X})$ al espacio $G_{\mathbf{Z}}(\mathbf{Z})$.

Calculando el vector normal al nuevo hiperplano se tiene que:

$$\boldsymbol{\alpha}^T = \frac{1}{\sqrt{\sum_{i=1}^n b_i^2}} (b_1, b_2, \dots, b_n) \quad (2.36)$$

Sustituyendo esta expresión en (2.35), resulta:

$$g_{\mathbf{Z}}(\mathbf{z}) = b_0 + \sqrt{\sum_{i=1}^n b_i^2} \boldsymbol{\alpha}^T \mathbf{z} \quad (2.37)$$

Dado que en el punto óptimo se ha de cumplir (2.13) se llega a la siguiente expresión:

$$g_{\mathbf{Z}}(\mathbf{z}^*) = \frac{b_0}{\sqrt{\sum_{i=1}^n b_i^2}} + \boldsymbol{\alpha}^T \mathbf{z}^* = 0, \quad (2.38)$$

en la que se ha dividido la expresión (2.37) por $\sqrt{\sum_{i=1}^n b_i^2}$, que al estar igualada a cero no varía el resultado.

Despejando \mathbf{z}^* , resulta

$$\mathbf{z}^* = -\boldsymbol{\alpha} \frac{b_0}{\sqrt{\sum_{i=1}^n b_i^2}},$$

identificando términos entre esta última expresión y (2.32) llegamos a conclusión de que β es igual a

$$\beta = \frac{b_0}{\sqrt{\sum_{i=1}^n b_i^2}} \quad (2.39)$$

y teniendo en cuenta (2.35)

$$\beta = \frac{a_0 + \sum_{i=1}^n a_i \mu_{X_i}}{\sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2 \sigma_{X_i}^2}} \quad (2.40)$$

que como no podía ser de otra manera es idéntica a las expresiones (2.21) y (2.14).

Cuando la ecuación de estado límite es no lineal no se pueden obtener los dos primeros momentos de $G_{\mathbf{X}}(\mathbf{X})$ en el espacio \mathbf{X} , ni en el espacio \mathbf{Z} . Esto se debe a que una combinación no lineal de variables normales no genera otra variable normal. Por tanto se procederá a realizar un desarrollo en serie de Taylor en el entorno del punto de diseño, para lo cual se ha de resolver el problema (2.12)-(2.13).

Introduciendo la función Lagrangiana el problema se transforma en:

$$\mathcal{L}(\mathbf{z}, \lambda) = \underset{\mathbf{z}, \lambda}{\text{Mínimo}} \sqrt{\mathbf{z}^T \mathbf{z}} + \lambda g_{\mathbf{Z}}(\mathbf{z}) \quad (2.41)$$

donde λ es el multiplicador de Lagrange asociado a la restricción (2.13).

Derivando con respecto a las variables \mathbf{z} y λ e igualando a cero:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z_i} &= z_i (\mathbf{z}^T \mathbf{z})^{(-1/2)} + \lambda \frac{\partial g_{\mathbf{Z}}}{\partial z_i} = 0; \quad i = 1, \dots, n \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} &= g_{\mathbf{Z}}(\mathbf{z}) = 0 \end{aligned} \quad (2.42)$$

que de forma compacta queda:

$$0 = \mathbf{z} \delta^{-1} + \lambda \nabla g_{\mathbf{Z}}(\mathbf{z}) \quad (2.43)$$

$$0 = g_{\mathbf{Z}}(\mathbf{z}) \quad (2.44)$$

donde $\nabla g_{\mathbf{Z}}(\mathbf{z}) = (\partial g_{\mathbf{Z}}/\partial z_1, \partial g_{\mathbf{Z}}/\partial z_2, \dots, \partial g_{\mathbf{Z}}/\partial z_n)^T$ y $\delta = (\mathbf{z}^T \mathbf{z})^{1/2}$. La expresión (2.44) se cumple por definición, por lo tanto despejando \mathbf{z} de la expresión (2.43) (véase Horne y Price [96]):

$$\mathbf{z}^* = -\lambda \nabla g_{\mathbf{Z}}(\mathbf{z}) \delta \quad (2.45)$$

Si el punto obtenido es un máximo, mínimo o un punto de silla depende de la función $\nabla g_{\mathbf{Z}}(\mathbf{z})$. Suponiendo que es un mínimo e identificando términos de la fórmula (2.45) con los de la expresión (2.32) se tiene que $\lambda = \pm (\nabla g_{\mathbf{Z}}(\mathbf{z})^T \nabla g_{\mathbf{Z}}(\mathbf{z}))^{-1/2}$ y $\delta = \beta$, despejando β , se llega a la siguiente expresión:

$$\beta = \frac{-\mathbf{z}^{*T} \nabla g_{\mathbf{Z}}(\mathbf{z})}{(\nabla g_{\mathbf{Z}}(\mathbf{z})^T \nabla g_{\mathbf{Z}}(\mathbf{z}))^{1/2}} = -\mathbf{z}^{*T} \boldsymbol{\alpha} \quad (2.46)$$

Demostración. Se demostrará mediante el desarrollo en serie de Taylor que efectivamente el β calculado en (2.46) es la mínima distancia del origen a la región de fallo. Linearizando la ecuación de estado límite $g(\cdot)$ en el entorno del supuesto punto de diseño \mathbf{z}^* :

$$g_{\mathbf{Z}}(\mathbf{z}) \approx g_{\mathbf{Z}}(\mathbf{z}^*) + (\mathbf{z} - \mathbf{z}^*)^T \nabla g_{\mathbf{Z}}(\mathbf{z}) \quad (2.47)$$

como $g_{\mathbf{Z}}(\mathbf{z}^*)$ está sobre la ecuación de estado límite $g_{\mathbf{Z}}(\mathbf{z}^*) = 0$, con lo cual

$$g_{\mathbf{Z}}(\mathbf{z}) \approx -\mathbf{z}^{*T} \nabla g_{\mathbf{Z}}(\mathbf{z}) + \mathbf{z}^T \nabla g_{\mathbf{Z}}(\mathbf{z}) \quad (2.48)$$

que es una combinación lineal de variables normales, por lo que pueden calcularse los dos primeros momentos de la aproximación lineal de $g_{\mathbf{Z}}(\mathbf{z})$:

$$\mu_{g_{\mathbf{Z}}(\mathbf{z})} = -\mathbf{z}^{*T} \nabla g_{\mathbf{Z}}(\mathbf{z}) \quad (2.49)$$

$$\sigma_{g_{\mathbf{Z}}(\mathbf{z})}^2 = \nabla g_{\mathbf{Z}}(\mathbf{z})^T \nabla g_{\mathbf{Z}}(\mathbf{z}) \quad (2.50)$$

Como $\beta = \mu_{g_{\mathbf{Z}}(\mathbf{z})} / \sigma_{g_{\mathbf{Z}}(\mathbf{z})}$ se llega a la conclusión de que:

$$\beta = \frac{\mu_{g_{\mathbf{Z}}(\mathbf{z})}}{\sigma_{g_{\mathbf{Z}}(\mathbf{z})}} = \frac{-\mathbf{z}^{*T} \nabla g_{\mathbf{Z}}(\mathbf{z})}{(\nabla g_{\mathbf{Z}}(\mathbf{z})^T \nabla g_{\mathbf{Z}}(\mathbf{z}))^{1/2}} = -\mathbf{z}^{*T} \boldsymbol{\alpha} \quad (2.51)$$

que es idéntica a la expresión (2.46), con lo que queda demostrado. ■

2.6.4. Parámetros de sensibilidad

Los cosenos directores α_i calculados en la sección anterior representan la sensibilidad de la función de estado límite $g_{\mathbf{z}}(\mathbf{z})$ en \mathbf{z}^* a cambios en la variable z_i (Hohenbichler y Rackwitz [95] y Bjerager y Krenk [19]). Es muy importante para reducir la dimensionalidad de los problemas, y para estudiar que variables tienen más influencia en la fiabilidad de un sistema. De tal forma que si el valor de la sensibilidad es pequeño se puede tratar la variable asociada como determinista.

2.6.5. Solución numérica para ecuaciones de estado límites no lineales

En muchas situaciones, principalmente cuando el número de variables es muy grande o se tienen ecuaciones de estado límite muy complejas, es preciso recurrir a soluciones numéricas. Si las restricciones son lineales el problema se reduce a un problema de programación cuadrática, para los que existen algoritmos muy eficientes. Si la restricción $g_{\mathbf{z}}(\mathbf{z}) = 0$ es no lineal hay varios algoritmos que funcionan bien con ese tipo de metodologías (Liu y Der Kiureghian [110]). Uno de los que mejor funciona es el método del gradiente proyectado, originalmente desarrollado por Rosen [139], éste es una modificación del método del descenso para optimización no restringida. Los métodos de penalización no son adecuados para problemas de fiabilidad. El método del lagrangiano aumentado se comporta mejor que los métodos de penalización, pero son complicados de implementar, sobre todo a la hora de dar valores iniciales a los multiplicadores de Lagrange de las restricciones. Los métodos de programación cuadrática secuencial fueron introducidos en el campo de la fiabilidad por Shinzuka [148]. Schittkowski [146] basándose en el método de Han, Powel y Wilson (véase Gill, Murray y Wright [87]) propuso una rutina basada en programación secuencial cuadrática que se ha hecho muy popular en el campo de la fiabilidad. La idea esencial del método es reemplazar el Hessiano del Lagrangiano por una matriz aproximada, y usar la función Lagrangiana aumentada para determinar el tamaño de paso. Otro algoritmo de programación secuencial cuadrática ampliamente extendido en el campo de la fiabilidad estructural es el debido a Powell [134].

A continuación se va a desarrollar el método propuesto por Hasofer y Lind [91], que se puede considerar más un procedimiento iterativo que una clase de algoritmo.

Algoritmo 2.1 (Método de Hasofer-Lind (FOSM)). Partiendo de la aproximación lineal de la función $g_{\mathbf{z}}(\mathbf{z})$ en el punto $\mathbf{z}^{(i)}$:

$$g_{\mathbf{z}}(\mathbf{z}^{(i+1)}) \approx g_{\mathbf{z}}(\mathbf{z}^{(i)}) + (\mathbf{z}^{(i+1)} - \mathbf{z}^{(i)})^T \nabla g_{\mathbf{z}}(\mathbf{z}^{(i)}) = 0, \quad (2.52)$$

donde $\nabla g_{\mathbf{z}}(\mathbf{z}^{(i)}) = \partial g_{\mathbf{z}} / \partial \mathbf{z}^{(i)}$. Y teniendo en cuenta que:

$$\mathbf{z}^{(i)} = -\boldsymbol{\alpha}^{(i)} \beta^{(i)}; \quad \boldsymbol{\alpha}^{(i)} = \frac{\nabla g_{\mathbf{z}}(\mathbf{z}^{(i)})}{\left(\nabla g_{\mathbf{z}}(\mathbf{z}^{(i)})^T \nabla g_{\mathbf{z}}(\mathbf{z}^{(i)}) \right)^{1/2}} \quad (2.53)$$

Sustituyendo (2.53) en (2.52) y reorganizando la expresión se obtiene la siguiente fórmula

recurrente:

$$\mathbf{z}^{(i+1)} = -\boldsymbol{\alpha}^{(i)} \left(\beta^{(i)} + \frac{g_{\mathbf{Z}}(\mathbf{z}^{(i)})}{\left(\nabla g_{\mathbf{Z}}(\mathbf{z}^{(i)})^T \nabla g_{\mathbf{Z}}(\mathbf{z}^{(i)})\right)^{1/2}} \right) \quad (2.54)$$

El algoritmo queda por tanto:

- **Entrada:** Conjunto inicial de variables $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$, su función de densidad conjunta $f_{X_1, X_2, \dots, X_n}(x_1, x_2, \dots, x_n)$, y la región de fallo $g_{\mathbf{X}}(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq 0$.
- **Salida:** La probabilidad de fallo asociada a la región de fallo dada.

Paso 1: Transformación de las variables $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ al espacio multinormal estándar $\{Z_1, Z_2, \dots, Z_n\}$.

Paso 2: Transformación de la región de fallo $g_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = 0$ a $g_{\mathbf{Z}}(\mathbf{z}) = 0$.

Paso 3: Selección del punto de inicio $(\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{z}^{(1)})$.

Paso 4: Obtención de la distancia del punto $\mathbf{z}^{(i)}$ al origen, éste será la aproximación i -ésima del índice de fiabilidad, $\beta^{(i)} = \sqrt{\mathbf{z}^{(i)T} \mathbf{z}^{(i)}}$.

Paso 5: Obtención de $\nabla g_{\mathbf{Z}}(\mathbf{z}^{(i)})$ y los cosenos directores $\boldsymbol{\alpha}^{(i)}$ del vector normal a la región de fallo $g_{\mathbf{Z}}(\mathbf{z}^{(i)}) = 0$ mediante la fórmula (2.53).

Paso 6: Cálculo de $g_{\mathbf{Z}}(\mathbf{z}^{(i)})$.

Paso 7: Obtención de la nueva aproximación del punto de diseño $\mathbf{z}^{(i+1)}$ mediante la fórmula (2.54) y el índice de fiabilidad $\beta^{(i+1)} = \sqrt{\mathbf{z}^{(i+1)T} \mathbf{z}^{(i+1)}}$.

Paso 8: Si el valor de β o de $g_{\mathbf{Z}}(\mathbf{z})$ se estabiliza, se para el procedimiento. Si no, incrementar i en una unidad y continuar con el algoritmo en el **paso 5**.

En la figura 2.4 se muestra la interpretación geométrica de cada una de las etapas del procedimiento iterativo. ■

También es posible transformar la relación (2.54) y expresarla en el espacio original \mathbf{X} , con lo que no se requiere la transformación al espacio \mathbf{Z} (véase Parkinson [131] y Li y Lumb [107]):

$$\mathbf{x}^{(i+1)} = \boldsymbol{\mu}_{\mathbf{X}} - \boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{X}} \nabla g_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})^{(i)} \frac{(\mathbf{x}^{(i)} - \boldsymbol{\mu}_{\mathbf{X}})^T \nabla g_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})^{(i)}}{\nabla g_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})^{(i)T} \boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{X}} \nabla g_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})^{(i)}} \quad (2.55)$$

donde $\nabla g_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = (\partial g_{\mathbf{X}}/\partial x_1, \partial g_{\mathbf{X}}/\partial x_2, \dots, \partial g_{\mathbf{X}}/\partial x_n)^T$, $\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{X}}$ es el vector de medias de las variables aleatorias y $\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{X}}$ es la matriz de varianzas-covarianzas.

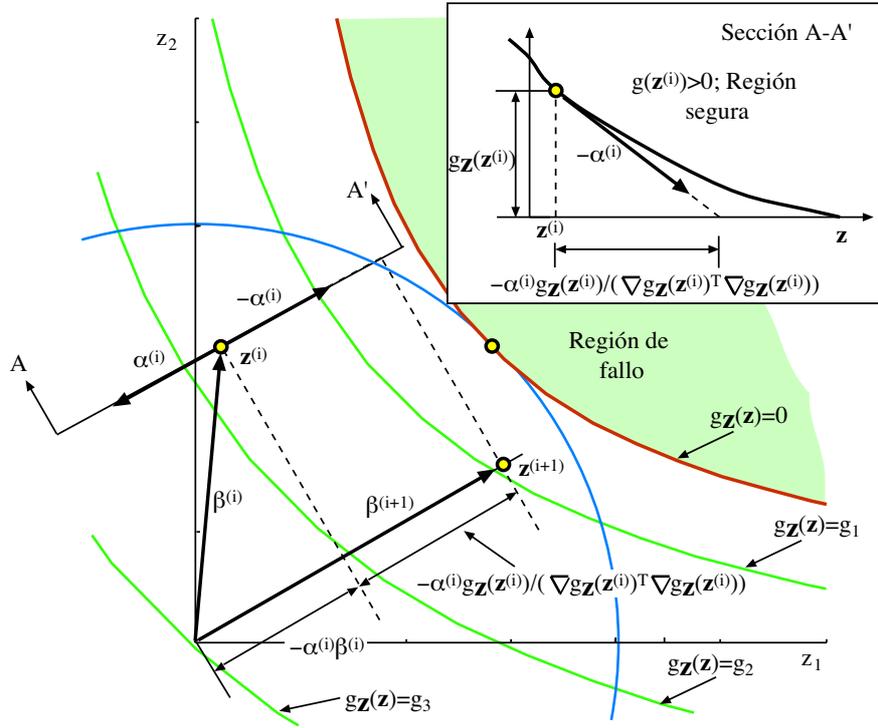


Figura 2.4: Ilustración gráfica del método de Hasofer-Lind para el caso bidimensional, en la que se aprecia la interpretación geométrica de todas las variables que intervienen.

2.6.6. Límites de la probabilidad de fallo

La teoría FOSM se centraba en obtener un valor indicativo de la fiabilidad del sistema, que además fuera invariante. Pero, ¿cómo se puede relacionar el índice de fiabilidad β obtenido con la probabilidad de superación o fallo del estado límite?

Todo depende de la forma de la función de estado límite, ya que si es lineal, se obtiene la probabilidad de fallo exacta sin más que aplicar $p_f = \Phi(-\beta)$. En cambio si se aplica esta formulación a una ecuación de estado límite no lineal, pueden pasar dos cosas: si la región de fallo es convexa con respecto a origen (véase la figura 2.6) la aproximación es un límite inferior de la probabilidad de fallo, y si es cóncava como en la figura 2.5 es una cota superior.

En el caso de que la función sea cóncava y con una curvatura muy grande (véase la figura 2.5) se puede calcular una cota superior de la probabilidad de fallo. En este caso se aproxima la región de fallo por una hipersfera con centro en el origen y radio el índice de fiabilidad β . Como $\sum_{i=1}^n Z_i^2 \sim \chi_n^2$

$$p_f \leq P\left(\sum_{i=1}^n Z_i^2 > \beta^2\right) = 1 - F_{\chi_n^2}(\beta^2), \quad (2.56)$$

donde $F_{\chi_n^2}$ es la función de distribución de la variable aleatoria χ^2 con n grados de libertad.

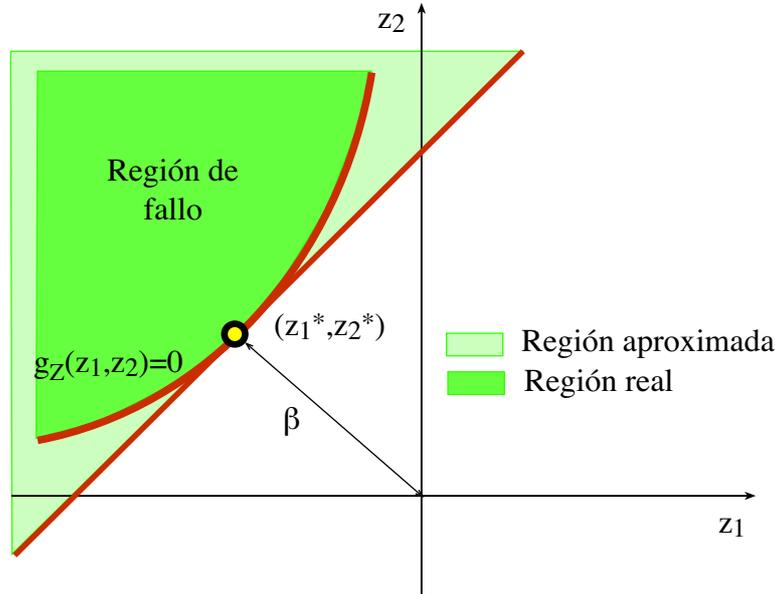


Figura 2.5: Cota superior de la probabilidad de fallo cuando la región de fallo es convexa con respecto al origen.

Nótese que esta cota está muy del lado de la seguridad, por eso apenas se utiliza.

Sin embargo, se han propuesto otros muchos métodos, como los de Freudenthal [82], Hasofer y Lind [91], Breitung [22], Castillo, Solares, y Gómez [43, 42, 44], y Haskin, Staple y Ding [90], por ejemplo.

2.7. Métodos de fiabilidad de primer orden (FORM)

En la sección 2.6 hemos visto la metodología empleada para calcular la probabilidad de fallo de un sistema considerando sólo los dos primeros momentos de las variables aleatorias. En esta sección se estudiará la aproximación lineal del problema pero trabajando con las distribuciones reales de las variables.

La metodología es exactamente la misma que en el método FOSM lo único que cambia es la transformación de las variables aleatorias $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ al espacio normal estándar multivariado $\mathbf{Z} = (Z_1, Z_2, \dots, Z_n)$, que al trabajar con las funciones de densidad exactas requieran métodos de transformación especiales.

2.7.1. Transformación de las variables

La transformación de una variable aleatoria X independiente con una distribución cualesquiera en una variable Z normalmente distribuida se conoce como transformación normal y se puede expresar matemáticamente como:

$$F_X(x) = \Phi(z) \text{ o bien } z = \Phi^{-1}(F_X(x)) \quad (2.57)$$

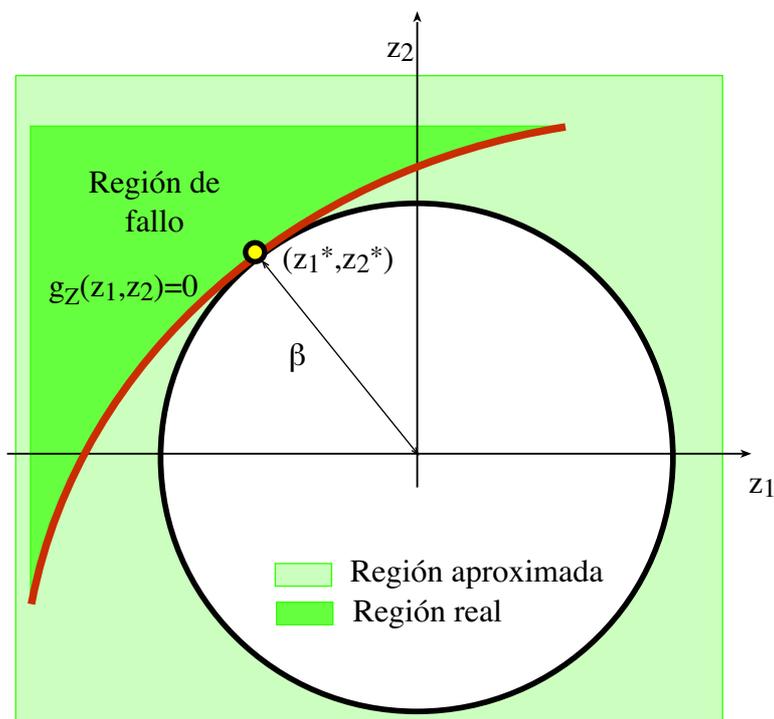


Figura 2.6: Cota superior de la probabilidad de fallo cuando la región de fallo es cóncava con respecto al origen.

donde $F_X(x)$ es la función de distribución de la variable X y Φ es la función de distribución de la variable normal estándar $Z \sim N(0, 1)$.

Obsérvese que la transformación normal requiere una transformación intermedia en la variable uniforme $U = F_X(X)$ (véase la figura 5.5).

En el caso de que las variables no sean independientes se puede aplicar la transformación de Rosenblatt [140]:

$$\begin{aligned}
 u_1 &= F_1(x_1) \\
 u_2 &= F_2(x_2|x_1) \\
 &\vdots \\
 u_n &= F_n(x_n|x_1, x_2, \dots, x_{n-1}),
 \end{aligned}
 \tag{2.58}$$

con lo que se obtienen las variables uniformes independientes $U(0, 1)$, primer paso de la figura 5.5. Posteriormente se aplica la transformación normal a las variables uniformes y se obtienen las Z , segundo paso de la figura 2.7:

$$\begin{aligned}
 z_1 &= \Phi^{-1}(F_1(x_1)) \\
 z_2 &= \Phi^{-1}(F_2(x_2|x_1)) \\
 &\vdots \\
 z_n &= \Phi^{-1}(F_n(x_n|x_1, x_2, \dots, x_{n-1})).
 \end{aligned}
 \tag{2.59}$$

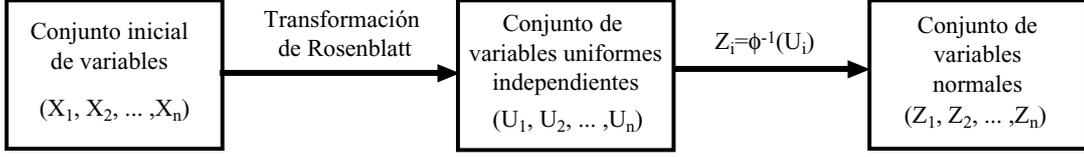


Figura 2.7: Ilustración de cómo se transforma el conjunto inicial de variables en un conjunto de variables uniformes independientes primero, y en un conjunto de variables normales independientes estándar después.

donde $F_1(x_1)$, $F_2(x_2|x_1)$, \dots , $F_n(x_n|x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$ son las funciones de distribución marginales de X_1 y de las variables condicionales indicadas, respectivamente.

Antes de incorporar la transformación de las variables al algoritmo, es necesario transformar la ecuación de estado límite de $g_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$ a $g_{\mathbf{Z}}(\mathbf{z})$ y calcular el jacobiano \mathbf{J} de la transformación (2.59) cuyos elementos son de la forma:

$$j_{ij} = \frac{\partial z_j}{\partial x_i} = \frac{1}{\phi(z_j)} \frac{\partial F_j(x_j|x_1, x_2, \dots, x_{j-1})}{\partial x_i}. \quad (2.60)$$

Evidentemente, si $i > j$, $\partial F_j/\partial x_i = 0$, por lo tanto la matriz jacobiana es triangular superior, y puede calcularse su inversa por simple sustitución hacia atrás.

El cálculo de los gradientes $\nabla g_{\mathbf{Z}}(\mathbf{z})$ puede ser dificultoso porque en general no se dispone de una expresión explícita de $g_{\mathbf{Z}}(\mathbf{z})$. En esos casos se procede de la siguiente manera, teniendo en cuenta que:

$$\frac{\partial g_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})}{\partial x_j} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial g_{\mathbf{Z}}(\mathbf{z})}{\partial z_i} \frac{\partial z_i}{\partial x_j} = [\mathbf{J}] \frac{\partial g_{\mathbf{Z}}(\mathbf{z})}{\partial \mathbf{z}} \quad (2.61)$$

de tal forma que

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial g_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})}{\partial x_1} \\ \frac{\partial g_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial g_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})}{\partial x_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial z_1}{\partial x_1} & \frac{\partial z_2}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial z_n}{\partial x_1} \\ \frac{\partial z_1}{\partial x_2} & \frac{\partial z_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial z_n}{\partial x_2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial z_1}{\partial x_n} & \frac{\partial z_2}{\partial x_n} & \cdots & \frac{\partial z_n}{\partial x_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial g_{\mathbf{Z}}(\mathbf{z})}{\partial z_1} \\ \frac{\partial g_{\mathbf{Z}}(\mathbf{z})}{\partial z_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial g_{\mathbf{Z}}(\mathbf{z})}{\partial z_n} \end{pmatrix} \quad (2.62)$$

calculando la inversa del jacobiano

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial g_{\mathbf{Z}}(\mathbf{z})}{\partial z_1} \\ \frac{\partial g_{\mathbf{Z}}(\mathbf{z})}{\partial z_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial g_{\mathbf{Z}}(\mathbf{z})}{\partial z_n} \end{pmatrix} = \mathbf{J}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\partial g_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})}{\partial x_1} \\ \frac{\partial g_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial g_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})}{\partial x_n} \end{pmatrix} \quad (2.63)$$

En los casos en los que no se dispone de la función de densidad conjunta de las variables que intervienen, sino que se tienen las funciones de distribución marginales de cada una de las variables $F_{\mathbf{x}}(\mathbf{x})$ y la matriz de correlación ρ no se puede aplicar Rosenblatt, pero se dispone de la transformación de Nataf [124].

2.7.2. Algoritmo FORM

Se puede extender el algoritmo 2.1 para determinar el punto de diseño y el índice de fiabilidad β de la teoría FOSM al caso FORM (véase Hohenbichler y Rackwitz [94]).

Algoritmo 2.2 (Método FORM).

- **Entrada:** Conjunto inicial de variables $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$, su función de densidad conjunta $f_{X_1, X_2, \dots, X_n}(x_1, x_2, \dots, x_n)$, y la región de fallo $g_{\mathbf{x}}(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq 0$.
- **Salida:** La probabilidad de fallo asociada a la región de fallo dada y el punto de diseño.

Paso 1: Iniciación $i = 1$ y selección del punto de inicio $\mathbf{x}^{(i)}$.

Paso 2: Transformación de las variables $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ al espacio multinormal estándar $\{Z_1, Z_2, \dots, Z_n\}$ mediante (2.57) o (2.59) y obtención de $\mathbf{z}^{(i)}$.

Paso 3: Obtención del jacobiano \mathbf{J} mediante la expresión (2.60), y su inversa \mathbf{J}^{-1} por sustitución hacia atrás.

Paso 4: Cálculo de los cosenos directores $\boldsymbol{\alpha}^{(i)}$ de acuerdo a (2.62) y (2.31), evaluación de $g_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}^{(i)}) = g_{\mathbf{z}}(\mathbf{z}^{(i)})$ y estimación de $\beta^{(i)}$ conforme a (2.32).

Paso 5: Obtención de la nueva aproximación del punto de diseño $\mathbf{z}^{(i+1)}$ mediante la fórmula (2.54) y de su índice de fiabilidad $\beta^{(i+1)} = \sqrt{\mathbf{z}^{(i+1)T} \mathbf{z}^{(i+1)}}$. Se puede calcular el punto $\mathbf{x}^{(i+1)}$ usando la transformación inversa de (2.59).

Paso 6: Si el valor de β o de $g_{\mathbf{z}}(\mathbf{z})$ se estabiliza, se para el procedimiento. Si no, incrementar i en una unidad y continuar con el algoritmo en el **paso 3**.

■

Ejemplo computacional 2.1 (Método FORM). El siguiente ejemplo se encuentra en Melchers [121] y está adaptado de Dolinsky [69], y Hohenbichler y Rackwitz [94]. Es uno de los pocos casos en los que se puede tratar analíticamente todo el problema. Considérese la ecuación de estado límite

$$g_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}) = 6 - 2x_1 - x_2$$

donde \mathbf{x} son variables aleatorias con la siguiente función de densidad conjunta:

$$f_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}) = \begin{cases} (ab - 1 + ax_1 + bx_2 + x_1x_2) \exp(-ax_1 - bx_2 - x_1x_2) & \text{si } x_1, x_2 \geq 0 \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases} \quad (2.64)$$

Las funciones de densidad marginales se obtienen integrando de la forma siguiente:

$$f_{X_1}(x_1) = \int_{x_2=0}^{\infty} f_{\mathbf{X}}(x_1, x_2) dx_2 = a \exp(-ax_1) \quad (2.65)$$

$$f_{X_2}(x_2) = \int_{x_1=0}^{\infty} f_{\mathbf{X}}(x_1, x_2) dx_1 = b \exp(-bx_2), \quad (2.66)$$

la transformación de Rosenblatt particularizada para este ejemplo será:

$$\Phi(z_1) = F_1(x_1) = \int_{w=0}^{x_1} f_{X_1}(w) dw = 1 - \exp(-ax_1); \quad \forall x_1 \geq 0 \quad (2.67)$$

$$\begin{aligned} \Phi(z_2) = F_2(x_2|x_1) &= \frac{\int_0^{x_2} f_{\mathbf{X}}(x_1, w) dw}{f_{X_1}(x_1)} \\ &= 1 - \left(1 + \frac{x_2}{a}\right) \exp(-bx_2 - x_1x_2). \end{aligned} \quad (2.68)$$

Por lo que la ecuación de estado límite en función de \mathbf{z} (véase la figura 2.8) queda como:

$$g_{\mathbf{z}}(\mathbf{z}) = 6 - 2F_1^{-1}(\Phi(z_1)) - F_2^{-1}(\Phi(z_2)) \quad (2.69)$$

El jacobiano de la expresión (2.62) queda de la siguiente manera:

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \frac{\partial z_1}{\partial x_1} & \frac{\partial z_2}{\partial x_1} \\ \frac{\partial z_1}{\partial x_2} & \frac{\partial z_2}{\partial x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\phi(z_1)} \frac{\partial F_1(x_1)}{\partial x_1} & \frac{1}{\phi(z_2)} \frac{\partial F_2(x_2|x_1)}{\partial x_1} \\ \frac{1}{\phi(z_1)} \frac{\partial F_1(x_1)}{\partial x_2} & \frac{1}{\phi(z_2)} \frac{\partial F_2(x_2|x_1)}{\partial x_2} \end{pmatrix} \quad (2.70)$$

Calculando las expresiones analíticas correspondientes se tiene:

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\phi(z_1)} \frac{a}{\exp(ax_1)} & \frac{1}{\phi(z_2)} \frac{x_2(a+x_2)}{a \exp(x_2(b+x_1))} \\ 0 & \frac{1}{\phi(z_2)} \frac{(b+x_1)(a+x_2)-1}{a \exp(x_2(b+x_1))} \end{pmatrix} \quad (2.71)$$

mientras que la inversa, calculada por sustitución hacia atrás es

$$\mathbf{J}^{-1} = \begin{pmatrix} \phi(z_1) \frac{\exp(ax_1)}{a} & -\phi(z_2) \frac{\exp(ax_1)x_2(a+x_2)}{a((a+x_2)(b+x_1)-1)} \\ 0 & \phi(z_2) \frac{a \exp(b+x_1)x_2}{(a+x_2)(b+x_1)-1} \end{pmatrix} \quad (2.72)$$

Supóngase que $a = 1$ y $b = 2$, el algoritmo 2.2 procedería de la siguiente manera:

1. Iniciación $i = 1$ y selección del punto de inicio $\mathbf{x}^{(1)} = (1, 4)^T$.

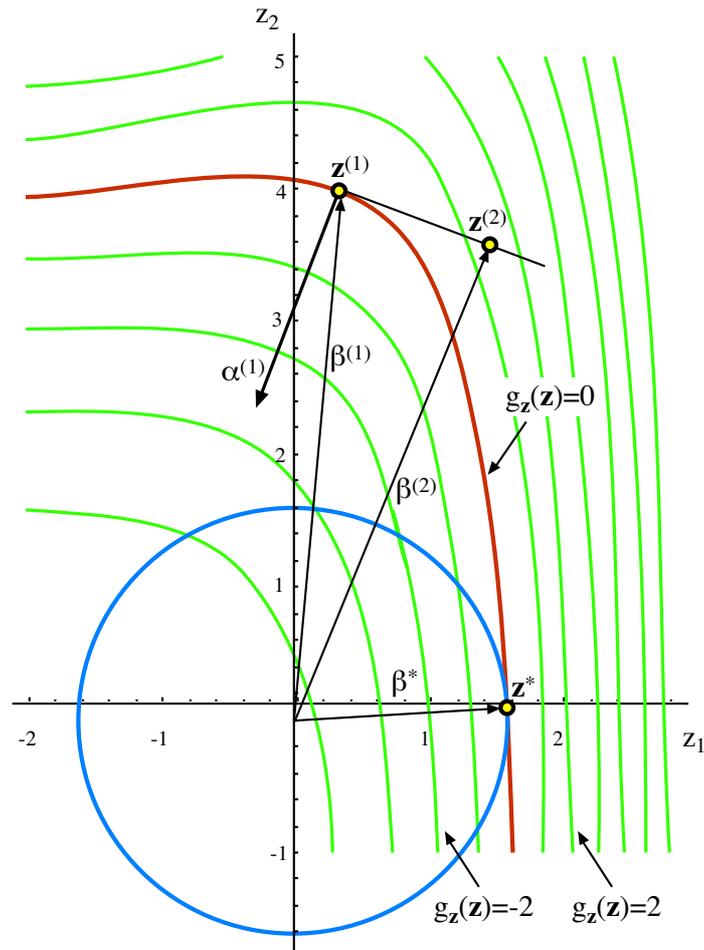


Figura 2.8: Ilustración gráfica del ejemplo computacional 2.1 en el que muestran diferentes contornos de la ecuación de estado límite $g_z(\mathbf{z})$, el punto de inicio $\mathbf{z}^{(1)}$, el correspondiente a la segunda iteración $\mathbf{z}^{(2)}$ y el punto solución \mathbf{z}^* .

2. Transformación del vector $\mathbf{x}^{(1)}$ al $\mathbf{z}^{(1)} = (0,337475, 4,0072)^T$ (véase la figura 2.8) mediante (2.67) y (2.68).
3. Obtención del jacobiano \mathbf{J} y su inversa \mathbf{J}^{-1} mediante las expresiones (2.71) y (2.72),

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} 0,976172 & 0,945074 \\ 0 & 0,661552 \end{pmatrix}; \mathbf{J}^{-1} = \begin{pmatrix} 1,02441 & -1,46344 \\ 0 & 1,5116 \end{pmatrix}.$$

4. Cálculo de los cosenos directores $\boldsymbol{\alpha}^{(1)}$ (véase la figura 2.8) de acuerdo a (2.62) y (2.31), evaluación de $g_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}^{(1)}) = g_{\mathbf{z}}(\mathbf{z}^{(1)})$ y estimación de $\beta^{(1)}$ conforme a (2.32).

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_{\mathbf{z}}(\mathbf{z})}{\partial z_1} \\ \frac{\partial g_{\mathbf{z}}(\mathbf{z})}{\partial z_2} \end{pmatrix} = \mathbf{J}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\partial g_{\mathbf{x}}(\mathbf{x})}{\partial x_1} \\ \frac{\partial g_{\mathbf{x}}(\mathbf{x})}{\partial x_2} \end{pmatrix} = \mathbf{J}^{-1} \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,585377 \\ -1,5116 \end{pmatrix}$$

de tal forma que como $\ell = 1,62099$,

$$\boldsymbol{\alpha}^{(1)} = \begin{pmatrix} -0,361124 \\ -0,932518 \end{pmatrix}; g_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}^{(1)}) = 0; \beta^{(1)} = (0,337475^2 + 4,0072^2)^{(1/2)} = 4,02139.$$

5. Obtención de la nueva aproximación del punto de diseño $\mathbf{z}^{(2)}$ mediante la fórmula (2.54). Se puede calcular el punto $\mathbf{x}^{(2)}$ usando la transformación inversa de (2.59),

$$\mathbf{z}^{(2)} = -\boldsymbol{\alpha}^{(1)} * (\beta^{(1)} + g_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}^{(1)})/\ell) = (1,45222, 3,75002)^T$$

y

$$\mathbf{x}^{(2)} = (2,61428, 2,28018)^T.$$

El algoritmo se repite hasta que los valores de \mathbf{x} o de \mathbf{z} se estabilizan, en la tabla 2.2 se muestra la evolución de las variables durante la ejecución del algoritmo. Los valores solución correspondientes a la última fila de la tabla son:

$$\mathbf{x}^* = (2,90434, 0,191314)^T, \mathbf{z}^* = (1,60013, 0,084909)^T \text{ y } \beta^* = 1,60238.$$

■

Este mismo problema se podría haber resuelto mediante algún método de optimización, a continuación se presenta el código perteneciente al programa de optimización GAMS (General Algebraic Modelling System) para resolver el problema con el método del gradiente reducido generalizado.

```
$title Ejemplo computacional
```

```
file out /libro.out/;
put out;
```

Cuadro 2.2: Evolución del algoritmo 2.2 para el ejemplo computacional 2.1.

i	$x_1^{(i)}$	$x_2^{(i)}$	$z_1^{(i)}$	$z_2^{(i)}$	$\beta^{(i)}$	$g_{\mathbf{z}}(\mathbf{z}^{(i)})$
1	4,00000	1,000000	0,33747	4,007200	4,02139	0,00000
2	2,61428	2,280180	1,45222	3,750020	3,50844	-1,50875
3	7,74292	0,226621	3,33027	1,103810	2,13942	-9,71246
4	4,12096	0,142202	2,13873	0,054346	1,65564	-2,38413
5	3,01625	0,179809	1,65478	0,053338	1,60332	-0,21232
6	2,90687	0,189931	1,60138	0,078868	1,60239	$-3,68037 \times 10^{-3}$
7	2,90442	0,191209	1,60017	0,084425	1,60238	$-4,32695 \times 10^{-5}$
8	2,90435	0,191307	1,60013	0,084875	1,60238	$-2,64198 \times 10^{-7}$
9	2,90434	0,191314	1,60013	0,084909	1,60238	$-1,32413 \times 10^{-9}$

SETS

```
I numero de variables aleatorias /1*2/;
```

SCALARS

```
pi /3.1415926535898/;
```

PARAMETERS

```
a /1.0/
```

```
b /2.0/;
```

VARIABLES

```
beta indice de fiabilidad
```

```
pf probabilidad de fallo (FORM)
```

```
z(I) variables aleatorias normales;
```

POSITIVE VARIABLES

```
x(I) variables aleatorias;
```

EQUATIONS

```
betadef definicion del indice de fiabilidad
```

```
Zdef1 transformacion de Rosenblatt para la variable 1
```

```
Zdef2 transformacion de Rosenblatt para la variable 2
```

```
verdef ecuacion de estado limite;
```

```
betadef..beta=e=sqrt(sum(I,sqr(z(I))));
```

```
Zdef1..errorf(z('1'))=e=1-exp(-a*x('1'));
```

```
Zdef2..errorf(z('2'))=e=1-(1+x('2')/a)*exp(-b*x('2')-x('1')*x('2'));
```

```
verdef..0=e=6-2*x('1')-x('2');
```

```
MODEL ejemplo/betadef,Zdef1,Zdef2,verdef/;
```

```
* Valores iniciales de las variables
```

```
x.l('1')=1.0;
```

```
x.l('2')=4.0;
```

```

put "Valores iniciales"//;
loop(I,
    put "x(",I.tl:1,")= ",x.l(I):12:8/;
);

*Resolucion del modelo
SOLVE ejemplo USING nlp MINIMIZING beta;

put "pf= ",(errorf(-beta.l)):12:8,", modelstat= ",ejemplo.modelstat,
    ", solvestat= ",ejemplo.solvestat/;
put "beta= ",(beta.l):12:8/;
loop(I,
    put "z(",I.tl:1,")= ",z.l(I):12:8/;
);
loop(I,
    put "x(",I.tl:1,")= ",x.l(I):12:8/;
);

```

Tras ejecutar se obtendrá la solución en el fichero 'libro.out', que tendrá la forma siguiente:

Valores iniciales

```

x(1)= 1.00000000
x(2)= 4.00000000
pf= 0.05453556, modelstat= 2.00, solvestat= 1.00
beta= 1.60238010
z(1)= 1.60012890
z(2)= 0.08490869
x(1)= 2.90434319
x(2)= 0.19131363

```

Como se puede comprobar la solución es la misma que la del ejemplo computacional 2.1 pero se observa la simplicidad de utilizar un paquete de optimización estándar.

2.7.3. Aplicación del método FORM al rebase de diques en talud

Los diques de escollera como el de la figura 2.9 se construyen a lo largo de las playas y de la línea de costa para proteger la zona costera de la acción del oleaje durante los temporales. El cuerpo del dique, ha de ser lo suficientemente resistente para soportar la acción del oleaje, y lo suficientemente alto para impedir el rebase de agua. Este fenómeno depende principalmente de relación entre la altura de ola que incide sobre la estructura y el francobordo de la estructura, es decir, la altura relativa entre el nivel del mar y la cresta del dique. Así, se producirá rebase cuando el ascenso por la pendiente del talud (*'run-up'*) producido por una ola incidente sea mayor que el francobordo.

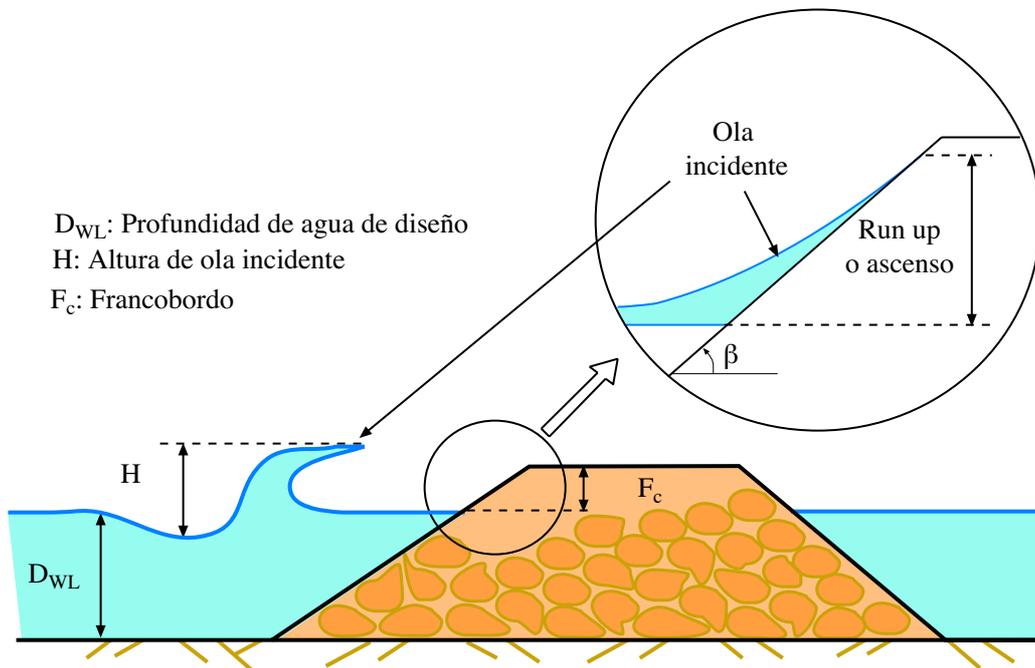


Figura 2.9: Ilustración del dique en talud y sus principales elementos.

Losada y Giménez Curto (1979) propusieron una expresión experimental para el cálculo del ascenso (R_u),

$$R_u = A_u H (1 - \exp(-B_u I_r)), \quad (2.73)$$

donde

R_u : máximo ascenso de agua.

I_r : número de Irribarren $I_r \approx 1,25T \tan \beta / \sqrt{H}$, para profundidades reducidas.

A_u y B_u : parámetros experimentales dependientes del tipo de material,.

H y T : altura y periodo de la ola incidente, respectivamente.

$\tan \beta$: pendiente del talud.

Por tanto, la ecuación de estado límite (verificación de fallo) es

$$g(A_u, B_u, H, T) = F_c - R_u < 0, \quad (2.74)$$

donde F_c es el francobordo. Nótese, que si F_c es menor que R_u entonces $g(A_u, B_u, H, T) < 0$, que significa que ha habido rebase.

Hipótesis del modelo

Para el cálculo de la fiabilidad frente al rebase se hacen las siguientes hipótesis:

1. A_u y B_u son variables aleatorias normales independientes entre ellas, e independientes de (H, T) , ya que dependen del tipo de material y su disposición en el talud.
2. La función de densidad de la altura relativa de ola es una distribución de Raileigh

$$F_H(h) = 1 - \exp(-1,416^2 h^2), \quad (2.75)$$

donde $h = H/H_s$ es la altura relativa y H_s es la altura de ola significativa de un estado de mar.

3. La función de densidad conjunta $(H/H_s, T/T_z)$ sigue una distribución de Longuet-Higgins $(LH(\nu))$, es decir:

$$f(t, h; \nu) = 2 \left[\frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{1 + \nu^2}} \right) \right]^{-1} \exp \left\{ -h^2 \left[1 + \left(\left(1 - \frac{1}{t} \right) \frac{1}{\nu} \right)^2 \right] \right\} \frac{h^2}{\nu t^2 \sqrt{\pi}}; \quad h, t \geq 0, \quad (2.76)$$

donde $t = T/T_z$ y T_z es el periodo medio de paso por cero.

Finalmente, la distribución de periodos para un cierto rango de altura de ola puede obtenerse de la fórmula de la función de densidad condicionada como

$$f(t|h) = \frac{f(t, h; \nu)}{f(h)} = \frac{1,416h}{\sqrt{\pi\nu}} \exp \left(-\frac{1,416^2 h^2}{\nu^2} (t-1)^2 \right). \quad (2.77)$$

Esta función de densidad es una normal de media uno. La desviación típica se obtiene de forma inmediata como:

$$\sigma(t) = \frac{\nu}{1,416\sqrt{2}h}.$$

Esta ecuación indica que el rango de la distribución de periodos de acuerdo a una altura de ola es inversamente proporcional a la altura de ola. Así, las alturas de ola más pequeñas tienen una distribución de periodos más ancha.

La teoría anterior se ha confirmado que es aplicable siempre que se trabaje con oleajes de espectro estrecho, es decir, valores bajos del parámetro ν ($\nu^2 < 0,36$).

En la tabla 2.3 se describen las hipótesis estadísticas del modelo para las cuatro variables aleatorias A_u, B_u, H y T .

Aplicación del método FORM estándar

Se van a cambiar en ciertos aspectos las directrices del algoritmo 2.2 para obtener una interpretación distinta pero equivalente del problema, se tienen que realizar los siguientes pasos:

Cuadro 2.3: Distribuciones estadísticas de las variables en el ejemplo de rebase.

Variable	Distribución
A_u	$N(1,05, 0,210^2)$
B_u	$N(-0,67, 0,134^2)$
H/H_s	Raileigh($H_s = 5$)
$(H/H_s, T/T_z)$	$LH(\nu = 0,25), T_z = 10$

1. Determinación de la transformación de Rosenblatt

$$\begin{aligned}
u_1 &= \Phi((A_u - m_a)/s_a) \\
u_2 &= \Phi((B_u - m_b)/s_b) \\
u_3 &= F_H(H/H_s) \\
u_4 &= \Phi\left(\frac{T/T_z - 1}{\nu/(1,416\sqrt{2}h)}\right)
\end{aligned} \tag{2.78}$$

2. Transformación al espacio multinormal estándar \mathbf{Z}

$$\begin{aligned}
z_1 &= (A_u - m_a)/s_a \\
z_2 &= (B_u - m_b)/s_b \\
z_3 &= \Phi^{-1}(F_H(H/H_s)) \\
z_4 &= \frac{T/T_z - 1}{\nu/(1,416\sqrt{2}h)}
\end{aligned} \tag{2.79}$$

3. Comienzo del procedimiento iterativo:

a) Selección de un punto inicial en términos de las variables aleatorias

$$\mathbf{x}^{(1)} = \left(A_u^{(1)}, B_u^{(1)}, H^{(1)}, T^{(1)} \right)^T,$$

así usando (2.79) se obtiene el punto inicial

$$\mathbf{z}^{(1)} = \left(z_1^{(1)}, z_2^{(1)}, z_3^{(1)}, z_4^{(1)} \right)^T.$$

b) Mediante el desarrollo en serie de Taylor se linealiza la ecuación de estado límite $g_{\mathbf{z}}(\mathbf{z})$ transformada de la (2.74)

$$g_{\mathbf{z}}(\mathbf{z}) = g_{\mathbf{z}}\left(\mathbf{z}^{(1)}\right) + \frac{\partial g_{\mathbf{z}}\left(\mathbf{z}^{(1)}\right)}{\partial \mathbf{z}} \left(\mathbf{z} - \mathbf{z}^{(1)}\right).$$

La ecuación de verificación $g_{\mathbf{z}}(\mathbf{z}^{(1)}) = g_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}^{(1)})$ se obtiene inmediatamente sin más que sustituir en (2.74), en cambio la derivada $\partial g_{\mathbf{z}}(\mathbf{z}^{(1)})/\partial \mathbf{z}$ es más compli-

cada de evaluar,

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_{\mathbf{z}}(\mathbf{z})}{\partial \mathbf{z}} &= \begin{pmatrix} \frac{\partial g_{\mathbf{x}}}{\partial A_u} \frac{\partial A_u}{\partial z_1} + \frac{\partial g_{\mathbf{x}}}{\partial B_u} \frac{\partial B_u}{\partial z_1} + \frac{\partial g_{\mathbf{x}}}{\partial H} \frac{\partial H}{\partial z_1} + \frac{\partial g_{\mathbf{x}}}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial z_1} \\ \frac{\partial g_{\mathbf{x}}}{\partial A_u} \frac{\partial A_u}{\partial z_2} + \frac{\partial g_{\mathbf{x}}}{\partial B_u} \frac{\partial B_u}{\partial z_2} + \frac{\partial g_{\mathbf{x}}}{\partial H} \frac{\partial H}{\partial z_2} + \frac{\partial g_{\mathbf{x}}}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial z_2} \\ \frac{\partial g_{\mathbf{x}}}{\partial A_u} \frac{\partial A_u}{\partial z_3} + \frac{\partial g_{\mathbf{x}}}{\partial B_u} \frac{\partial B_u}{\partial z_3} + \frac{\partial g_{\mathbf{x}}}{\partial H} \frac{\partial H}{\partial z_3} + \frac{\partial g_{\mathbf{x}}}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial z_3} \\ \frac{\partial g_{\mathbf{x}}}{\partial A_u} \frac{\partial A_u}{\partial z_4} + \frac{\partial g_{\mathbf{x}}}{\partial B_u} \frac{\partial B_u}{\partial z_4} + \frac{\partial g_{\mathbf{x}}}{\partial H} \frac{\partial H}{\partial z_4} + \frac{\partial g_{\mathbf{x}}}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial z_4} \end{pmatrix} = \\ &= \mathbf{J}^{-1} \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial A_u}{\partial z_1} & \frac{\partial B_u}{\partial z_1} & \frac{\partial H}{\partial z_1} & \frac{\partial T}{\partial z_1} \\ \frac{\partial A_u}{\partial z_2} & \frac{\partial B_u}{\partial z_2} & \frac{\partial H}{\partial z_2} & \frac{\partial T}{\partial z_2} \\ \frac{\partial A_u}{\partial z_3} & \frac{\partial B_u}{\partial z_3} & \frac{\partial H}{\partial z_3} & \frac{\partial T}{\partial z_3} \\ \frac{\partial A_u}{\partial z_4} & \frac{\partial B_u}{\partial z_4} & \frac{\partial H}{\partial z_4} & \frac{\partial T}{\partial z_4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial g_{\mathbf{x}}}{\partial A_u} \\ \frac{\partial g_{\mathbf{x}}}{\partial B_u} \\ \frac{\partial g_{\mathbf{x}}}{\partial H} \\ \frac{\partial g_{\mathbf{x}}}{\partial T} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

donde \mathbf{J}^{-1} es el inverso del jacobiano de la transformación de Rosenblatt \mathbf{J} que en este caso es,

$$\begin{aligned} \mathbf{J} &= \begin{pmatrix} \frac{\partial z_1}{\partial A_u} & \frac{\partial z_2}{\partial A_u} & \frac{\partial z_3}{\partial A_u} & \frac{\partial z_4}{\partial A_u} \\ \frac{\partial z_1}{\partial B_u} & \frac{\partial z_2}{\partial B_u} & \frac{\partial z_3}{\partial B_u} & \frac{\partial z_4}{\partial B_u} \\ \frac{\partial z_1}{\partial H} & \frac{\partial z_2}{\partial H} & \frac{\partial z_3}{\partial H} & \frac{\partial z_4}{\partial H} \\ \frac{\partial z_1}{\partial T} & \frac{\partial z_2}{\partial T} & \frac{\partial z_3}{\partial T} & \frac{\partial z_4}{\partial T} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma_a} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sigma_b} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial \Phi^{-1}(F_H(H/H_s))}{\partial H} & \frac{T/T_z - 1}{(\nu/\sqrt{2}(H^2/H_s)1,416)} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1/T_z}{(\nu/\sqrt{2}(H/H_s)1,416)} \end{pmatrix} \quad (2.80) \end{aligned}$$

mientras que $\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}}$ es,

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial g_{\mathbf{x}}}{\partial A_u} \\ \frac{\partial g_{\mathbf{x}}}{\partial B_u} \\ \frac{\partial g_{\mathbf{x}}}{\partial H} \\ \frac{\partial g_{\mathbf{x}}}{\partial T} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -H(1 - \exp(B_u I_r)) \\ H A_u I_r \exp(B_u I_r) \\ -A_u(1 - \exp(B_u I_r)) + H A_u B_u \exp(B_u I_r) \frac{\partial I_r}{\partial H} \\ H A_u B_u \exp(B_u I_r) \frac{\partial I_r}{\partial T} \end{pmatrix} \quad (2.81)$$

- c) Como en el punto solución se ha de cumplir que $g_{\mathbf{z}}(\mathbf{z}) = 0$, se calcula la siguiente estimación del punto de diseño como

$$\mathbf{z}^{(2)} = \mathbf{z}^{(1)} - \frac{g_{\mathbf{z}}(\mathbf{z}^{(1)})}{\partial g_{\mathbf{z}}(\mathbf{z}^{(1)}) / \partial \mathbf{z}}. \quad (2.82)$$

Nótese que esta expresión es la misma que (2.52) y, por tanto, igual a (2.54).

- d) Se continua el procedimiento iterativo hasta que \mathbf{z} o β se estabiliza.

Mediante técnicas de optimización

Se va a plantear el problema desde el punto de vista de la optimización utilizando un paquete estándar para su resolución. El planteamiento global del problema será:

$$\begin{array}{l} \text{Minimizar} \\ z_1, z_2, z_3, z_4 \end{array} \left(\sum_{i=1}^n z_i^2 \right)^{1/2} \quad (2.83)$$

sujeto a

$$\begin{aligned} z_1 &= (A_u - m_a) / s_a \\ z_2 &= (B_u - m_b) / s_b \\ \Phi(z_3) &= F_H(H/H_s) \\ z_4 &= \frac{T/T_z - 1}{(\nu/\sqrt{2}h1,416)} \\ 0 &= F_c - A_u H \left(1 - \exp(1,25 B_u T \tan \beta / \sqrt{H}) \right). \end{aligned} \quad (2.84)$$

A continuación se lista el fichero GAMS para la resolución de este problema:

```
$title Rebase
file out /rebase.out/;
put out;
```

SETS

```
I numero de variables aleatorias /1*4/;
```

SCALARS

```
pi /3.1415926535898/
a valor asociado a la distribucion de Raileigh /1.416/;
```

PARAMETERS

```
ma valor medio de Au /1.05/
sa desviacion estandar de Au /0.210/
mb valor medio de Bu /-0.67/
sb desviacion estandar de Bu /0.134/
Hs altura significativa del estado de mar /5.0/
Tz periodo medio del estado de mar /10.0/
nu coeficiente de anchura espectral /0.25/
tanb pendiente del talud
Fc francobordo /10/;
tanb=1/1.5;
```

VARIABLES

```
beta indice de fiabilidad
z(I) variables normales estandar
x(I) variables aleatorias;
```

EQUATIONS

```
betadef definicion del indice de fiabilidad
Zdef1 transformacion de Rosenblatt asociada a Au
Zdef2 transformacion de Rosenblatt asociada a Bu
Zdef3 transformacion de Rosenblatt asociada a H
Zdef4 transformacion de Rosenblatt asociada a T,H
verdef ecuacion de estado limite para el rebase;
```

```
betadef..beta=e=sqrt(sum(I,sqr(Z(I))));
Zdef1..Z('1')=e=(X('1')-ma)/sa;
Zdef2..Z('2')=e=(X('2')-mb)/sb;
Zdef3..errorf(Z('3'))=e=1-exp(-sqr(a*X('3')/Hs));
Zdef4..Z('4')=e=(X('4')/Tz-1)*(sqrt(2)*a*X('3')/Hs)/nu;
verdef..0=e=Fc-X('1')*X('3')*(1-exp(X('2')*1.25*X('4')*tanb/sqrt(X('3'))));
```

```
MODEL rebase/betadef,Zdef1,Zdef2,Zdef3,Zdef4,verdef/;
```

```
* Inicializacion de la variables
```

```
Z.1(I)=0;
X.1('1')=ma;
X.1('2')=mb;
X.1('3')=2.93981;
X.1('4')=Tz;
```

```

put "Valores iniciales"/;
loop(I,
  put "X(",I.tl:1,")= ",X.1(I):12:8/;
);
loop(I,
  put "Z(",I.tl:1,")= ",Z.1(I):12:8/;
);

SOLVE rebase USING nlp MINIMIZING beta;

put "pf= ",(errorf(-beta.1)):12:8,", modelstat= ",rebase.modelstat,",
  solvestat= ",rebase.solvestat/;
put "beta= ",beta.1:12:8/;
loop(I,
  put "Z(",I.tl:1,")= ",Z.1(I):12:8/;
);
put ""/;

put ""/;
loop(I,
  put "X(",I.tl:1,")= ",X.1(I):12:8/;
);

```

Ejemplo numérico

Aplicando las dos metodologías con los siguientes datos:

$$\begin{aligned}
 m_a = 1,05; \quad s_a = 0,210; \quad m_b = -0,67; \quad s_b = 0,134; \quad H_s = 5; \\
 T_z = 10; \quad \nu = 0,25; \quad \tan \beta = 1/1,5; \quad F_c = 10,
 \end{aligned}
 \tag{2.85}$$

se obtiene el mismo resultado, como era de esperar. El índice de fiabilidad es $\beta^* = 3,07867$, con lo que la probabilidad de fallo es igual a $p_f^* = 0,0010396$. Esto implica que la probabilidad de que una ola en un estado de mar definido por H_s y T_z produzca rebase es aproximadamente del 0,1 %. Los valores de las variables en el punto de máxima verosimilitud o diseño en ambos espacios son:

$$\begin{aligned}
 z_1^* = 1,6287; \quad z_2^* = -0,5308; \quad z_3^* = 2,5483; \quad z_4^* = 0,2233; \\
 A_u^* = 1,3920; \quad B_u^* = -0,7411; \quad H^* = 8,0669; \quad T^* = 10,1728.
 \end{aligned}$$

El fichero de salida 'rebase.out', tendrá la forma siguiente:

```

Valores iniciales
X(1)= 1.05000000
X(2)= -0.67000000
X(3)= 2.93981000
X(4)= 10.00000000
Z(1)= 0.00000000

```

```

Z(2)= 0.00000000
Z(3)= 0.00000000
Z(4)= 0.00000000
pf= 0.00103957, modelstat= 2.00, solvestat= 1.00
beta= 3.07866894
Z(1)= 1.62869708
Z(2)= -0.53081131
Z(3)= 2.54831685
Z(4)= 0.22331340

X(1)= 1.39202639
X(2)= -0.74112872
X(3)= 8.06687811
X(4)= 10.17279893

```

2.8. Métodos de segundo orden (SORM)

Los métodos de primer orden estudiados en las secciones precedentes, pueden no ser satisfactorios si la ecuación de estado límite tiene una curvatura significativa. Incluso, ecuaciones de estado límite aparentemente lineales o con poca curvatura en el espacio original \mathbf{X} pueden tener una gran curvatura en el espacio transformado \mathbf{Z} .

Para estos casos hay otras aproximaciones posibles, como muestran Breitung [22], Castillo, Solares, y Gómez [42, 43, 44], Haskin, Staple y Ding [90]. Muchas de ellas están basadas en el la utilización de aproximaciones de segundo orden (SORM, ‘second order reliability methods’) como en Breitung [22], Tvedt [162], Der Kiureghian et al. [60], Koyluoglu y Nielsen [104], etc.)

2.8.1. Métodos

Los métodos de segundo orden tratan de aproximar las ecuaciones de estado límite último por aproximaciones parabólicas o esféricas en el entorno del punto de diseño o de máxima verosimilitud.

Tras una aproximación parabólica de la región de fallo, la integral (2.1) puede expresarse de la siguiente manera (véase Madsen et al. [114]):

$$R = 1 - p_f = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x_1) \dots \phi(x_{n-1}) \int_{-\infty}^{\beta + \sum_{i=1}^{n-1} k_i x_i^2 / 2} \phi(x_n) dx_n dx_{n-1} \dots dx_1 \quad (2.86)$$

donde R es la fiabilidad del sistema, $\phi(\cdot)$ es la función de densidad de la variable normal estándar y $k_i = \partial^2 z_n / \partial^2 z_i$ son las curvaturas principales de la ecuación de estado límite $g_{\mathbf{Z}}(\mathbf{z}^*)$ en el punto de diseño \mathbf{z}^* , que pueden calcularse como los autovalores del Hessiano.

Breitung [22] obtuvo una fórmula asintótica que aproxima la probabilidad exacta de fallo cuando $\beta \rightarrow \infty$:

$$p_f = \Phi(-\beta) \prod_{i=1}^{n-1} (1 + \beta k_i)^{-1/2}, \quad (2.87)$$

donde $\Phi(\cdot)$ es la función de distribución de la variable normal estándar. Esta fórmula es válida sólo si $\beta k_i > -1$ y da buenos resultados con valores altos de β .

Para valores moderados del índice de fiabilidad β , Tvedt [162] introdujo una aproximación de tres términos en la que los dos últimos pueden interpretarse como correctores de la fórmula de Breitung:

$$p_f = A_1 + A_2 + A_3 \quad (2.88)$$

$$A_1 = \Phi(-\beta) \prod_{i=1}^{n-1} (1 + \beta k_i)^{-1/2} \quad (2.89)$$

$$A_2 = [\beta\Phi(-\beta) - \phi(\beta)] \left\{ \prod_{i=1}^{n-1} (1 + \beta k_i)^{-1/2} - \prod_{i=1}^{n-1} (1 + (\beta - 1)k_i)^{-1/2} \right\} \quad (2.90)$$

$$A_3 = (\beta + 1) [\beta\Phi(-\beta) - \phi(\beta)] \left\{ \prod_{i=1}^{n-1} (1 + \beta k_i)^{-1/2} - \operatorname{Re} \left[\prod_{i=1}^{n-1} (1 + (\beta + j)k_i)^{-1/2} \right] \right\} \quad (2.91)$$

donde j es la variable imaginaria. El segundo y tercer término no proporcionan una corrección suficientemente precisa para valores bajos de β en todos los casos. Y al igual que la fórmula de Breitung no funciona bien con curvaturas negativas, e incluso hay singularidades si la curvatura se aproxima a la de la esfera con centro el origen y radio β .

Posteriormente Tvedt [163] obtuvo una nueva formulación en el dominio complejo en la que se calcula la fiabilidad invirtiendo la función característica para la aproximación cuadrática. Tras introducir una nueva variable aleatoria $B = X_n - \sum_{i=1}^{n-1} k_i X_i^2 / 2$ cuya función característica es

$$M_B(\theta) = E[\exp(j\theta B)] = \exp\left(-\frac{1}{2}\theta^2\right) \prod_{i=1}^{n-1} (1 + j k_i \theta)^{-1/2} \quad (2.92)$$

la fórmula propuesta simplificada es

$$\begin{aligned} R = 1 - p_f &= P(B \leq \beta) = \int_{-\infty}^{\beta} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(ju\theta) M_B(\theta) d\theta du \\ &= 0,5 + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \sin\left(\beta\theta + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n-1} \arctan(k_i\theta)\right) \frac{\exp(-\theta^2/2)}{\theta \prod_{i=1}^{n-1} (1 + k_i^2\theta^2)^{1/4}} d\theta \end{aligned} \quad (2.93)$$

Tvedt derivó la expresión en el dominio complejo pero se ha transformado al dominio real para simplificar. Esta fórmula es exacta para integrales SORM, y aplicable para todo tipo de curvaturas y valores de β sin embargo requiere la integración numérica de (2.93), aunque es una integral unidimensional.

Una versión más sencilla y que parece prometedora es la aproximación propuesta por Koyluoglu y Nielsen [104], que utiliza una aproximación polinomial del gradiente de la función de densidad conjunta en el punto de diseño.

2.9. Problemas de Optimización Basados en Fiabilidad

La era moderna de la optimización estructural comenzó hace 35 años con el trabajo pionero de Smicht [150], que mostró claramente que los problemas de diseño estructural pueden plantearse como problemas de programación matemática. Y dado que las técnicas de optimización se han desarrollado enormemente, parece lógico que se traten de utilizar estas metodologías para el diseño.

Hay dos filosofías de diseño, íntimamente ligadas a las distintas medidas de la fiabilidad estructural (véase el capítulo 1): optimización estructural determinista (DSO, ‘Deterministic Structural Optimization’), y la optimización estructural basada en fiabilidad (RBSO, ‘Reliability-Based Structural Optimization’). Dado que los problemas ingenieriles son claramente no deterministas nos vamos a centrar en esta última.

En las últimas tres décadas se ha publicado una gran cantidad de literatura relativa a estos asuntos Murotsu, Kishi, Okada, Yonezawa y Taguchi [123], Sorensen [152, 153], para una revisión exhaustiva de la misma véase Frangopol [80]. Algunas de ellas incluyen las conferencias ICOSSAR-IASSAR: Kobe 1985 (Konishi et al. [103]), San Francisco 1989 (Ang et al. [6]), Innsbruck 1993 (Schÿeller et al. [147]). Las últimas conferencias ICASP-CERRA: Florencia 1983 (Augusti et al. [8]), Vancouver 1987 (Lind [109]), México 1991 (Esteva y Ruiz [75]) y Paris 1995 (Lemaire et al. [106]). Las Conferencias Especiales sobre Mecánica Probabilista y Fiabilidad Estructural: Berkeley 1984 (Wen [169]), BlacksBurg 1988 (Spanos [156]) y Denver 1992 (Lin [108]). Las seis conferencias sobre Fiabilidad y Optimización de Sistemas Estructurales del Grupo de Trabajo IFIP 7.5: Aalborg 1987 (Thoft-Christensen [159]), Londres 1988 (Thoft-Christensen [160]), Berkeley 1990 (Der Kiureghian y Thoft Christensen [62]) Munich 1991 (Rackwitz y Thoft-Christensen [137]), Takamatsu-shi 1993 (Thoft Christensen y Ishikawa [161]) y Assisi 1994 (Rackwitz et al. [135]).

El principal objetivo en el diseño estructural es conseguir estructuras con niveles de fiabilidad satisfactorios y lo más baratas posibles. Este requerimiento contradictorio usualmente se consigue mediante métodos deterministas basados en códigos, existen una gran cantidad de métodos numéricos que resuelven este tipo de problemas (véase Arora [7], Vanderplaats [164], Adeli [4], Bazaraa et al. [14], Castillo et al. [29], Luenberger [113]), pero actualmente, estamos en disposición de incluir la parte estadística del problema (véase Blockley [20], Ditlevsen y Madsen [67], Eurocódigo [76], ROM [56], Freudenthal [82], Madsen et al. [114], Melchers [121], Steward y Melchers [157], Wirsching y Wu [170], Wu, Burnside y Cruse [174]). La minimización del coste no es la única función objetivo propuesta, de hecho en la optimización determinista usualmente se minimiza el volumen o peso sujeto a las restricciones impuestas por los códigos para los esfuerzos, desplazamientos, etc. Y puede ser de interés un diseño que maximice la utilidad de la estructura, u otra función objetivo que se nos ocurra. Uno de los aspectos más complicados a la hora de definir la función objetivo de un problema basado en la fiabilidad es dar un coste monetario a los heridos o muertos que se pudieran producir, sin embargo, cuando se prescinde de ese término, se pueden diseñar

estructuras óptimas durante la vida útil de la obra teniendo en cuenta costes directos, costes de reparación, mantenimiento, etc.

2.9.1. Revisión del estado del arte

En esta subsección se recoge una recopilación de trabajos relacionados con la optimización estructural (véase Enevoldsen [70] y Enevoldsen y Sorensen [73]). En el capítulo 7 se presenta una recopilación de los problemas tratados en esta tesis.

Los problemas básicos que se presentan en la optimización estructural tratan de minimizar una función objetivo teniendo en consideración la fiabilidad del sistema, es decir que se añaden restricciones de fiabilidad, pero no sólo asociadas a modos de fallo independientes sino también relativas a sistemas tanto en serie como en paralelo (véase Enevoldsen y Sorensen [72], Royset, Der Kiureghian y Polak [142] o Der Kiureghian y Polak [61]). Las primeras aproximaciones al problema se concentraron en una optimización con dos niveles usando los métodos FORM, y también en una aproximación en un nivel donde el problema asociado a la fiabilidad se reemplazaba por las condiciones de Karush-Kuhn-Tucker del problema FORM (Madsen y Friis Hansen [115] y Kuschel y Rackwitz [105]). La primera aproximación tiene dos problemas (Kirjener-Neto et al. [102]): el primero que no es posible probar la convergencia de algoritmos estándar. El segundo es que requiere la evaluación de muchos índices de fiabilidad, que puede ser computacionalmente caro, además está limitado al uso de FORM, su extensión a SORM u otros métodos de fiabilidad es problemática. La segunda aproximación tiene varias desventajas, el método requiere las derivadas segundas de la ecuación de estado límite, y está limitada a aproximaciones FORM y SORM y a problemas con fiabilidades asociadas a componentes. Para sistemas, sólo se puede aplicar a sistemas en serie separables, es decir, a aquellos en los que la correlación entre modos de fallo es despreciable. El método de la superficie de respuesta ('Response Surface Method') se ha utilizado para obtener una solución aproximada usando dos niveles (Gasser y Schueller [86]). También ha habido esfuerzos para usar optimización estocástica, Marti [117] y Der Kiureghian y Polak [61] han reformulado los problemas de diseño relativos a fiabilidad a problemas de optimización semiinfinitos (Polak [132]). Kirjener-Neto et al. [102] desarrollaron una aproximación externa para resolver problemas con restricciones en componentes, y Der Kiureghian y Polak lo extendieron a sistemas estructurales introduciendo los cálculos relativos a fiabilidad independientemente del procedimiento de optimización.

Capítulo 3

Dualidad

3.1. Introducción

Este capítulo trata la dualidad en problemas de optimización [13]. Dado un problema de optimización, denominado *problema primal*, existe otro problema íntimamente ligado a él, denominado *problema dual*. Dado que la dualidad es una relación simétrica, es decir, el dual del problema dual es el primal, ambos problemas son duales el uno del otro. De aquí en adelante se presentarán una serie de ejemplos que reforzarán el entendimiento de este concepto tan importante.

Bajo ciertas hipótesis, los problemas primal y dual alcanzan el mismo valor óptimo de la función objetivo; por tanto es posible resolver el problema primal indirectamente sin más que resolver su correspondiente problema dual. Esto puede conllevar importantes ventajas desde el punto de vista computacional.

Como se mostrará más adelante, los valores de las variables duales dan las sensibilidades de la función objetivo con respecto a cambios en las restricciones.

Además las variables duales constituyen la información intercambiada entre el problema maestro y los subproblemas en la mayoría de las técnicas de descomposición existentes; de ahí, que el concepto de dualidad sea muy importante en esta tesis doctoral.

En la Sección 3.2 se describen las condiciones de optimalidad de Karush-Kuhn-Tucker. Como el planteamiento matemático de los problemas duales en programación lineal y no lineal tiene diferencias sustanciales, se tratarán por separado en las Secciones 3.3 y 3.4 respectivamente. Sin embargo, se mostrará más tarde su equivalencia.

3.2. Condiciones de optimalidad de Karush-Kuhn-Tucker

El problema general de programación matemática, también llamado *el problema de programación no lineal* (PPNL), se define como

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & z = f(x_1, \dots, x_n) \\ & x_1, \dots, x_n \end{array} \quad (3.1)$$

sujeto a

$$\begin{aligned} h_1(x_1, \dots, x_n) &= 0 \\ &\vdots \\ h_\ell(x_1, \dots, x_n) &= 0 \\ g_1(x_1, \dots, x_n) &\leq 0 \\ &\vdots \\ g_m(x_1, \dots, x_n) &\leq 0 \end{aligned}$$

Su forma compacta es

$$\begin{aligned} \text{Minimizar } z &= f(\mathbf{x}) \\ \mathbf{x} & \end{aligned} \quad (3.2)$$

sujeto a

$$\mathbf{h}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \quad (3.3)$$

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) \leq \mathbf{0} \quad (3.4)$$

donde $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^T$ es el vector de las *variables de decisión*, $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es la función objetivo, y $\mathbf{h} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^\ell$ y $\mathbf{g} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, donde $\mathbf{h}(\mathbf{x}) = (h_1(\mathbf{x}), \dots, h_\ell(\mathbf{x}))^T$ y $\mathbf{g}(\mathbf{x}) = (g_1(\mathbf{x}), \dots, g_m(\mathbf{x}))^T$, son, respectivamente, las restricciones de *igualdad* y *desigualdad*. Para que este problema sea propiamente no lineal, al menos una de las funciones involucradas en la formulación debe serlo. Cualquier vector $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ que satisface las restricciones se denomina *solución factible*, y el conjunto de todas las soluciones factibles se denomina *región factible*.

El resultado más importante en el campo de la programación no lineal es el que lleva a las condiciones de Karush, Kuhn and Tucker. Estas condiciones deben ser satisfechas por la solución óptima de cualquier problema lineal y de la mayoría de los problemas no lineales. Constituyen la base de muchos algoritmos computacionales y proporcionan un criterio de parada para muchos otros, permitiendo establecer cuándo ha sido alcanzado un óptimo local restringido.

En los problemas diferenciables de optimización no restringida la condición necesaria para que una solución sea mínimo local es que se anule el gradiente. Por el contrario, esta propiedad no es cierta para problemas diferenciables restringidos. Las condiciones de Karush–Kuhn–Tucker generalizan la condición necesaria desarrollada para problemas no restringidos a los problemas con restricciones.

Definición 3.1 (Condiciones de Karush–Kuhn–Tucker (CKKT)). *El vector $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ satisface las CKKT para el PPLN (3.2)–(3.4) si existe un par de vectores $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^m$ y $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^\ell$ tales que*

$$\nabla f(\mathbf{x}) + \sum_{k=1}^{\ell} \lambda_k \nabla h_k(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^m \mu_j \nabla g_j(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \quad (3.5)$$

$$h_k(\mathbf{x}) = 0, k = 1, \dots, \ell \quad (3.6)$$

$$g_j(\mathbf{x}) \leq 0, j = 1, \dots, m \quad (3.7)$$

$$\mu_j g_j(\mathbf{x}) = 0, j = 1, \dots, m \quad (3.8)$$

$$\mu_j \geq 0, j = 1, \dots, m \quad (3.9)$$

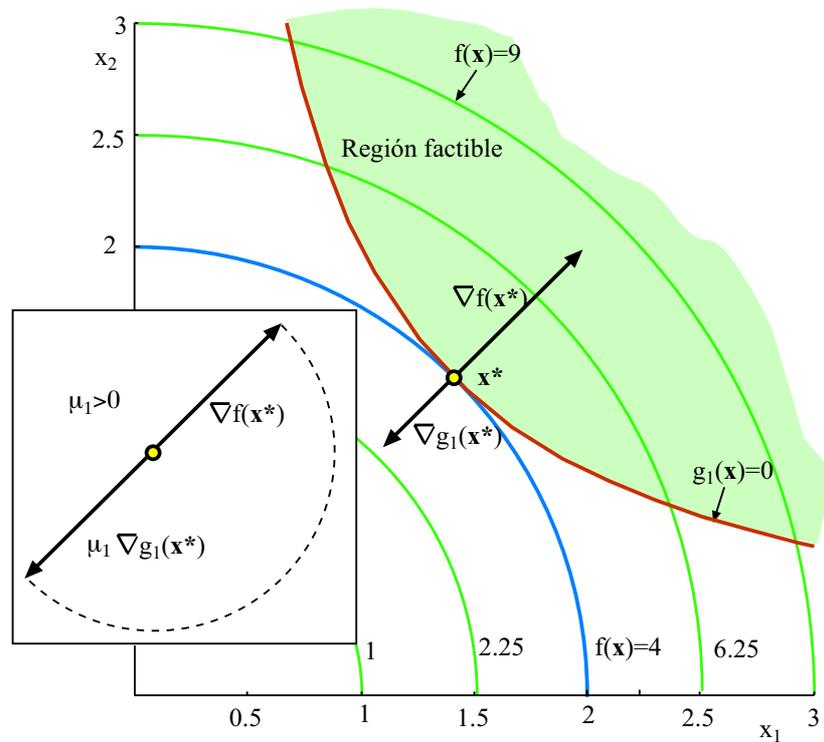


Figura 3.1: Ilustración de las condiciones de Karush-Kuhn-Tucker para el caso de una restricción de desigualdad en el caso bidimensional.

■

Los vectores μ y λ se denominan *multiplicadores de Kuhn-Tucker*. La condición (3.8) es conocida con el nombre de *condición de complementariedad*, la condición (3.8) requiere la no negatividad de los multiplicadores, y es llamada *condición de factibilidad dual*, y (3.7)–(3.6) se denominan *condiciones de factibilidad primal*.

La génesis de estas condiciones de optimalidad de primer orden (CKKT) puede ser motivada en el caso de dos variables independientes, como se muestra en las Figuras 3.1, 3.2 y 3.3.

Considérese el caso de una restricción de desigualdad (véase la Figura 3.1), que separa el plano \mathbb{R}^2 en dos regiones. En una de ellas se cumple la restricción (región de factibilidad), y en la otra no. Las soluciones factibles son aquellas que están en la región factible incluyendo la línea que separa ambas regiones. Si el mínimo de la función objetivo se alcanzara en el interior de la región factible, la restricción de desigualdad no sería activa y el multiplicador asociado sería nulo ($\mu_1 = 0$). Por el contrario, si se alcanza el mínimo en un punto del contorno, la restricción sería activa. El problema en este caso sería equivalente a considerar una restricción de igualdad, y en el mínimo, los gradientes de la función objetivo y de la restricción serían paralelos (véase la Figura 3.1). Deben apuntar en sentidos opuestos ya que la función ha de disminuir cuando uno se mueve hacia el interior de la región

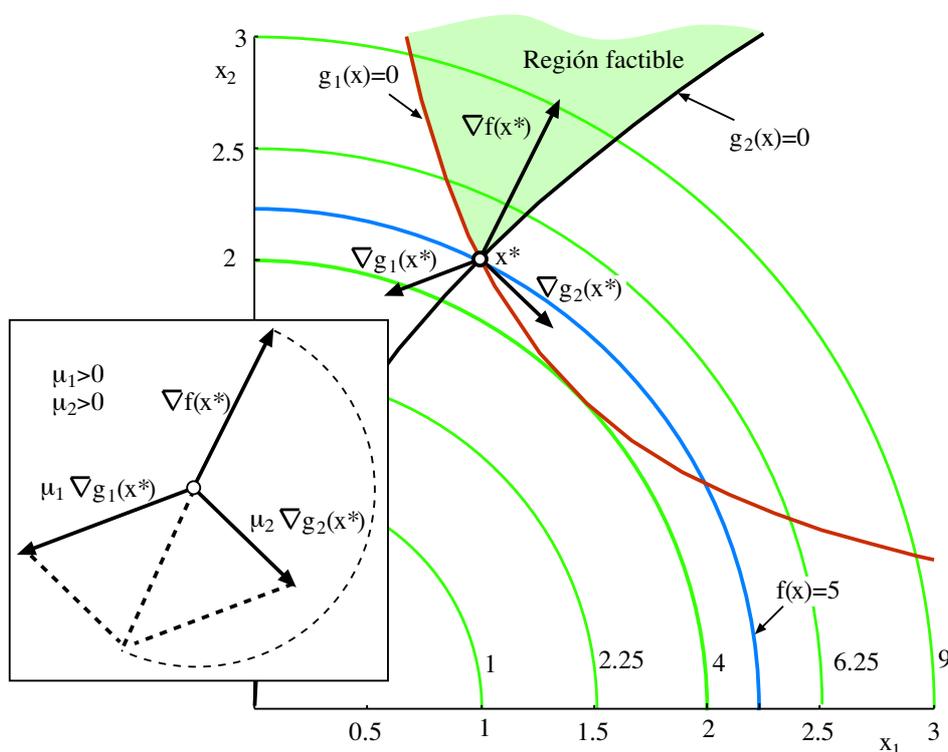


Figura 3.2: Ilustración de las condiciones de Karush-Kuhn-Tucker para el caso de dos restricciones de desigualdad en el caso bidimensional.

factible, mientras que la restricción se hace más negativa y por tanto disminuye su valor. El multiplicador es por tanto, o bien positivo o cero. Esto es lo que las condiciones de optimalidad dicen en esta situación.

Si se añade una nueva restricción de desigualdad (véase la Figura 3.2), la ecuación (3.5) requeriría que, si se multiplican los gradientes de cada una de las restricciones en el punto solución ($g_1(\mathbf{x}^*)$ y $g_2(\mathbf{x}^*)$) por su multiplicador correspondiente, el vector suma debe ser igual al gradiente negativo de la función objetivo, como se muestra en la Figura 3.2.

Ahora considérese el caso de una restricción de desigualdad y una de igualdad (véase la Figura 3.3). Satisfacer las restricciones es equivalente a moverse a lo largo de la curva que representa la condición de igualdad, pero dentro de la región de factibilidad definida por la restricción de desigualdad. Al moverse sobre esa curva, los contornos de la función objetivo han de disminuir para ir obteniendo valores menores de la función objetivo. Cuando se alcanza el punto en el que la restricción de desigualdad se cumple estrictamente, los gradientes de la función objetivo y de las restricciones son linealmente dependientes. Eso es lo que determinan las condiciones de optimalidad de primer orden (véase la Figura 3.3).

Comentario 3.1 (casos especiales.) Si en un determinado PPNL un cierto tipo de restricción (igualdad o desigualdad) no está presente, estas restricciones y sus correspondientes multiplicadores tampoco lo estarán en las correspondientes CKKT. La forma de las CKKT

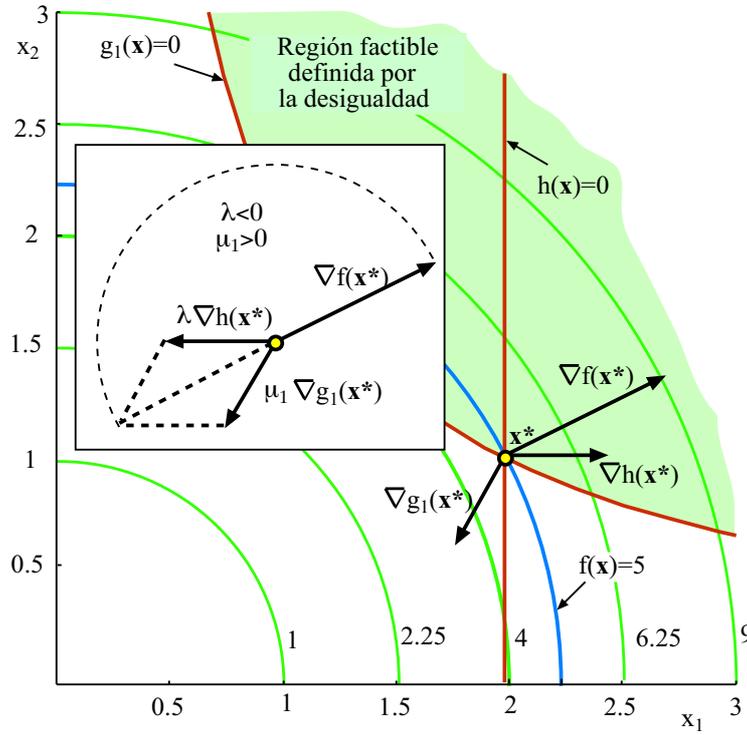


Figura 3.3: Ilustración de las condiciones de Karush-Kuhn-Tucker para el caso de una restricción de desigualdad y una restricción de igualdad en el caso bidimensional.

para estos casos son

1. **(Problemas no restringidos.)** En este caso se tiene sólo la condición

$$\nabla f(\mathbf{x}) = \mathbf{0}.$$

2. **(Problemas con sólo restricciones de igualdad).** Las CKKT son una extensión del método clásico de los multiplicadores. Este método aparece cuando el PPNL tiene exclusivamente restricciones de igualdad, y las CKKT tienen la forma

$$\begin{aligned} \nabla f(\mathbf{x}) + \sum_{k=1}^{\ell} \lambda_k \nabla h_k(\mathbf{x}) &= \mathbf{0} \\ h_k(\mathbf{x}) &= 0, \quad k = 1, \dots, \ell \end{aligned} \quad (3.10)$$

3. **(Problemas con sólo restricciones de desigualdad).** Las CKKTs son

$$\nabla f(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^m \mu_j \nabla g_j(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$$

$$\begin{aligned}
g_j(\mathbf{x}) &\leq 0, \quad j = 1, \dots, m \\
\mu_j g_j(\mathbf{x}) &= 0, \quad j = 1, \dots, m \\
\mu_j &\geq 0, \quad j = 1, \dots, m
\end{aligned} \tag{3.11}$$

■

Si se define la función Lagrangiana como

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\lambda}) = f(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{h}(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\mu}^T \mathbf{g}(\mathbf{x})$$

se pueden escribir la CKKTs como

$$\begin{aligned}
\nabla_{\mathbf{x}} \mathcal{L}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\lambda}) &= \mathbf{0} \\
\nabla_{\boldsymbol{\lambda}} \mathcal{L}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\lambda}) &= \mathbf{0} \\
\nabla_{\boldsymbol{\mu}} \mathcal{L}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\lambda}) &\leq \mathbf{0} \\
\boldsymbol{\mu}^T \nabla_{\boldsymbol{\mu}} \mathcal{L}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\lambda}) &= 0 \\
\boldsymbol{\mu} &\geq \mathbf{0}
\end{aligned}$$

Nótese que $\boldsymbol{\mu}^T \nabla_{\boldsymbol{\mu}} \mathcal{L}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\lambda}) = 0$ es equivalente $\mu_j g_j(\mathbf{x}) = 0, j = 1, \dots, m$ debido a que $\nabla_{\boldsymbol{\mu}} \mathcal{L}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\lambda}) \leq \mathbf{0}$ y $\boldsymbol{\mu} \geq \mathbf{0}$.

Caso especial de restricciones de igualdad

Considérese el siguiente problema.

$$\text{Minimizar}_{\mathbf{x}} \quad z = f(\mathbf{x}) \tag{3.12}$$

sujeto a

$$\mathbf{h}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \tag{3.13}$$

Las CKKTs para este problema en el que sólo se tienen restricciones de igualdad constituyen un sistema de ecuaciones no lineales

$$\begin{aligned}
\nabla_{\mathbf{x}} \mathcal{L}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) &= \mathbf{0} \\
\mathbf{h}(\mathbf{x}) &= \mathbf{0}
\end{aligned} \tag{3.14}$$

donde $\mathcal{L}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) = f(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{h}(\mathbf{x})$. El sistema anterior de $n + \ell$ ecuaciones no lineales puede resolverse por el método de Newton. Si \mathbf{z} denota $(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda})$ y $\mathbf{F}(\mathbf{z})$ denota el sistema (3.14), su desarrollo de Taylor es

$$\mathbf{F}(\mathbf{z} + \boldsymbol{\Delta z}) \approx \mathbf{F}(\mathbf{z}) + \nabla_{\mathbf{z}} \mathbf{F}(\mathbf{z}) \boldsymbol{\Delta z}$$

para $\|\boldsymbol{\Delta z}\|$ suficientemente pequeño.

Para obtener $\mathbf{F}(\mathbf{z}) = \mathbf{0}$, es conveniente encontrar una dirección $\Delta\mathbf{z}$ que cumpla $\mathbf{F}(\mathbf{z} + \Delta\mathbf{z}) = \mathbf{0}$. Esta dirección se calcula con la condición

$$\nabla_{\mathbf{z}}\mathbf{F}(\mathbf{z})\Delta\mathbf{z} = -\mathbf{F}(\mathbf{z})$$

donde $\nabla_{\mathbf{z}}\mathbf{F}(\mathbf{z})$ puede ser expresada como

$$\nabla_{\mathbf{z}}\mathbf{F}(\mathbf{z}) = \nabla_{(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda})}\mathbf{F}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) = \begin{pmatrix} \nabla_{\mathbf{xx}}\mathcal{L}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) & \nabla_{\mathbf{x}}^T\mathbf{h}(\mathbf{x}) \\ \nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{h}(\mathbf{x}) & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

y donde $\nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{h}(\mathbf{x})$ es el Jacobiano de $\mathbf{h}(\mathbf{x})$.

La matriz anterior se denomina *KKT* del problema (3.12)–(3.13), y el sistema

$$\begin{pmatrix} \nabla_{\mathbf{xx}}\mathcal{L}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) & \nabla_{\mathbf{x}}^T\mathbf{h}(\mathbf{x}) \\ \nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{h}(\mathbf{x}) & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta\mathbf{x} \\ \Delta\boldsymbol{\lambda} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \nabla_{\mathbf{x}}\mathcal{L}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) \\ \mathbf{h}(\mathbf{x}) \end{pmatrix}$$

se denomina sistema *KKT* del problema (3.12)–(3.13). La resolución del mismo constituye una iteración de Newton para resolver el sistema (3.14).

3.3. Dualidad en Programación Lineal

En esta sección se trata la dualidad en programación lineal. Se comienza dando la definición del problema dual.

Definición 3.2 (Problema dual). *Dado el problema de programación lineal*

$$\text{Minimizar } z = \mathbf{c}^T \mathbf{x} \tag{3.15}$$

sujeto a

$$\begin{aligned} \mathbf{Ax} &\geq \mathbf{b} \\ \mathbf{x} &\geq \mathbf{0} \end{aligned} \tag{3.16}$$

su problema dual es

$$\text{Maximizar } z = \mathbf{b}^T \mathbf{y} \tag{3.17}$$

sujeto a

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^T \mathbf{y} &\leq \mathbf{c} \\ \mathbf{y} &\geq \mathbf{0} \end{aligned} \tag{3.18}$$

donde $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_m)^T$ se denominan variables duales. ■

Al primer problema se le denomina problema primal, y al segundo, su dual. Obsérvese que los mismos elementos (la matriz \mathbf{A} , y los vectores \mathbf{b} y \mathbf{c}) definen ambos problemas. El problema primal no se ha escrito en su forma estándar, sino en una forma que nos permite apreciar la simetría entre ambos problemas, y mostrar así que el dual del dual es el primal.

Teorema 3.1 (Simetría de la relación de dualidad). *La dualidad es una relación simétrica, es decir que si el problema D es el dual del problema P , entonces P es también el dual de D .*

Demostración. Para comprobar lo anterior, se escribe el problema dual anterior como un problema de minimización con restricciones de la forma \geq , como en (3.15)-(3.16).

$$\begin{array}{l} \text{Minimizar} \\ \mathbf{y} \end{array} \quad z = -\mathbf{b}^T \mathbf{y}$$

sujeto a

$$\begin{array}{l} -\mathbf{A}^T \mathbf{y} \geq -\mathbf{c} \\ \mathbf{y} \geq \mathbf{0} \end{array} \quad (3.19)$$

Entonces, de acuerdo con la Definición 3.2, su dual es

$$\begin{array}{l} \text{Maximizar} \\ \mathbf{x} \end{array} \quad z = -\mathbf{c}^T \mathbf{x}$$

sujeto a

$$\begin{array}{l} -\mathbf{A} \mathbf{x} \leq -\mathbf{b} \\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{array} \quad (3.20)$$

que es equivalente al problema primal (3.15)-(3.16). ■

Comentario 3.2 *Como puede observarse, cada restricción del problema primal tiene asociada una variable del problema dual; los coeficientes de la función objetivo del problema primal son los términos independientes de las restricciones del problema dual y viceversa; y la matriz de restricciones del problema dual es la traspuesta de la matriz de restricciones del problema primal. Además, el problema primal es de minimización y el dual de maximización.* ■

3.3.1. Obtención del dual a partir del primal en su forma estándar

En esta sección se trata el problema de obtener el problema dual cuando el primal está en la forma estándar. Para hacer esto basta con aplicar la Definición 3.2 del problema dual.

Teorema 3.2 (Dual en la forma estándar). *El problema dual en la forma estándar de*

$$\begin{array}{l} \text{Minimizar} \\ \mathbf{x} \end{array} \quad z = \mathbf{c}^T \mathbf{x} \quad (3.21)$$

sujeto a

$$\begin{array}{l} \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{b} \\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{array} \quad (3.22)$$

es

$$\begin{array}{l} \text{Maximizar} \\ \mathbf{y} \end{array} \quad z = \mathbf{b}^T \mathbf{y} \quad (3.23)$$

sujeto a

$$\mathbf{A}^T \mathbf{y} \leq \mathbf{c} \quad (3.24)$$

Demostración. La igualdad $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ en (3.21) puede reemplazarse por las dos restricciones de desigualdad equivalentes $\mathbf{Ax} \geq \mathbf{b}$ y $-\mathbf{Ax} \geq -\mathbf{b}$. Entonces, se puede escribir el problema (3.21)-(3.22) como

$$\text{Minimizar } z = \mathbf{c}^T \mathbf{x}$$

sujeto a

$$\begin{aligned} \mathbf{Ax} &\geq \mathbf{b} \\ -\mathbf{Ax} &\geq -\mathbf{b} \\ \mathbf{x} &\geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

Usando la Definición 3.2, el dual de este problema es

$$\text{Maximizar } z = \mathbf{b}^T \mathbf{y}^{(1)} - \mathbf{b}^T \mathbf{y}^{(2)}$$

$$\mathbf{y}^{(1)}, \mathbf{y}^{(2)}$$

que es equivalente a

$$\text{Maximizar } z = \mathbf{b}^T \mathbf{y}$$

$$\mathbf{y}$$

donde $\mathbf{y} = \mathbf{y}^{(1)} - \mathbf{y}^{(2)}$ no está restringido en signo, sujeto a

$$\mathbf{A}^T \mathbf{y}^{(1)} - \mathbf{A}^T \mathbf{y}^{(2)} \leq \mathbf{c}$$

que es equivalente a

$$\mathbf{A}^T \mathbf{y} \leq \mathbf{c}$$

con lo que termina la demostración. ■

Comentario 3.3 *Esta relación entre los problemas primal y dual (Teorema 3.2) podría tomarse como definición del problema dual, y entonces, la definición dada inicialmente habría resultado ser un teorema.* ■

3.3.2. Obteniendo el problema dual

Un problema de programación lineal cuya formulación no está en la forma (3.15)-(3.16) tiene también dual. Para facilitar su obtención, se pueden usar las siguientes reglas:

Conjunto 1: El primer conjunto de reglas corresponde al caso en el que el problema primal sea de minimización:

Regla 1. Un problema primal de minimización da lugar a un problema dual de maximización, y viceversa.

Regla 2. Una restricción de igualdad en el primal (dual) implica que su variable dual (primal) correspondiente no esté restringida en signo.

Regla 3. Una restricción de desigualdad \geq (\leq) en el primal (dual) da lugar a una variable dual (primal) no negativa.

Regla 4. Una restricción de desigualdad \leq (\geq) en el primal (dual) da lugar a una variable dual (primal) no positiva.

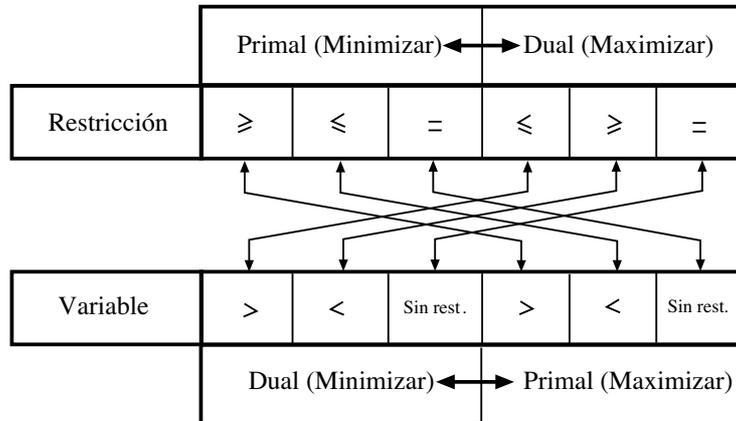


Figura 3.4: Reglas para obtener los problemas duales de los primales y viceversa.

Regla 5. Una variable primal (dual) no negativa da lugar a una restricción de desigualdad \leq (\geq) en el problema dual (primal).

Regla 6. Una variable primal (dual) no positiva da lugar a una restricción de desigualdad \geq (\leq) en el problema dual (primal).

Regla 7. Una variable primal (dual) no restringida da lugar a una restricción de igualdad en el problema dual (primal).

Conjunto 2: El segundo conjunto corresponde al caso en el que el problema primal es de maximización:

Regla 1. Un problema primal de maximización lleva a un problema dual de minimización, y viceversa.

Regla 2. Una restricción de igualdad en el problema primal (dual) da lugar a una variable dual (primal) no restringida en signo.

Regla 3. Una restricción de desigualdad \geq (\leq) en el primal (dual) da lugar a una variable dual (primal) no positiva.

Regla 4. Una restricción de desigualdad \leq (\geq) en el primal (dual) da lugar a una variable dual (primal) no negativa.

Regla 5. Una variable primal (dual) no negativa da lugar a una restricción de desigualdad \geq (\leq) en el problema dual (primal).

Regla 6. Una variable primal (dual) no positiva da lugar a una restricción de desigualdad \leq (\geq) en el problema dual (primal).

Regla 7. Una variable primal (dual) no restringida en signo da lugar a una restricción de igualdad en el problema dual (primal).

Las reglas anteriores se recogen en la Figura 3.4.

Ejemplo ilustrativo 3.1 (problema dual). El dual del problema de programación lineal

$$\begin{array}{l} \text{Minimizar} \quad z = x_1 + x_2 - x_3 \\ x_1, x_2, x_3 \end{array}$$

sujeto a

$$\begin{array}{rcl} 2x_1 & +x_2 & \geq 3 \\ x_1 & & -x_3 = 0 \\ & x_2 & +x_3 \leq 2 \\ & & x_3 \geq 0 \\ & & x_2 \leq 0 \end{array} \quad (3.25)$$

es

$$\begin{array}{l} \text{Maximizar} \quad z = 3y_1 + 2y_3 \\ y_1, y_2 \end{array}$$

sujeto a

$$\begin{array}{rcl} 2y_1 & +y_2 & = 1 \\ y_1 & & +y_3 \geq 1 \\ & -y_2 & +y_3 \leq -1 \\ & & y_1 \geq 0 \\ & & y_3 \leq 0 \end{array} \quad (3.26)$$

Para obtenerlo se aplican las reglas anteriores de la forma siguiente:

- Regla 1.** Puesto que el problema primal es de minimización, el dual es de maximización.
- Regla 2.** Puesto que la segunda restricción del problema primal es de igualdad, la segunda variable dual y_2 no está restringida en signo.
- Regla 3.** Como la primera restricción en el primal es \geq , la primera variable dual y_1 es no negativa.
- Regla 4.** Dado que la tercera restricción en el primal es \leq , la tercera variable dual y_3 es no positiva.
- Regla 5.** Puesto que la tercera variable en el primal x_3 es no negativa, la tercera restricción del dual es \leq .
- Regla 6.** Dado que la segunda variable en el primal x_2 es no positiva, la segunda restricción del dual es \geq .
- Regla 7.** Como la primera variable en el primal x_1 no está restringida en signo, la primera restricción del dual es una igualdad.

Usando las mismas reglas con el problema dual, podemos obtener el problema primal del dual, lo que se muestra a continuación:

Regla 1. Dado que el dual es un problema de maximización, el primal es de minimización.

Regla 2. Dado que la primera restricción en el dual es de igualdad, la primera variable primal x_1 está no restringida en signo.

Regla 3. Como la tercera restricción en el dual es \leq , la tercera variable primal x_3 es no negativa.

Regla 4. Puesto que la segunda restricción en el dual es \geq , la segunda variable primal x_2 es no positiva.

Regla 5. Puesto que la primera variable dual y_1 es no negativa, la primera restricción del primal es \geq .

Regla 6. Como la tercera variable dual y_3 es no positiva, la tercera restricción del primal es \leq .

Regla 7. Dado que la segunda variable dual y_2 no está restringida en signo, la segunda restricción del primal es una igualdad.

■

3.3.3. Teoremas de dualidad

La importancia de la relación primal–dual se establece en los siguientes teoremas.

Lema 3.1 (lema de dualidad débil) *Sea P el LPP (3.15)-(3.16), y D su dual (3.17)-(3.18). Sea \mathbf{x} una solución factible de P e \mathbf{y} una solución factible de D . Entonces*

$$\mathbf{b}^T \mathbf{y} \leq \mathbf{c}^T \mathbf{x} \quad (3.27)$$

Demostración. La demostración es simple. Si \mathbf{x} e \mathbf{y} son factibles respectivamente para P y D , entonces

$$\mathbf{A}\mathbf{x} \geq \mathbf{b}, \quad \mathbf{y} \geq \mathbf{0}, \quad \mathbf{A}^T \mathbf{y} \leq \mathbf{c}$$

Obsérvese que debido a la no negatividad de \mathbf{y} ,

$$\mathbf{b}^T \mathbf{y} \leq \mathbf{x}^T \mathbf{A}^T \mathbf{y} \leq \mathbf{x}^T \mathbf{c} = \mathbf{c}^T \mathbf{x}$$

■

Corolario 3.1 *Si $\mathbf{b}^T \tilde{\mathbf{y}} = \mathbf{c}^T \tilde{\mathbf{x}}$ para los vectores $\tilde{\mathbf{x}}$ y $\tilde{\mathbf{y}}$, factibles en P y D , respectivamente, entonces las soluciones de los problemas primal y dual son $\tilde{\mathbf{y}}$ y $\tilde{\mathbf{x}}$, respectivamente. Más aún, si $\tilde{\mathbf{x}}$ es una solución óptima para el problema primal, entonces, hay una solución óptima $\tilde{\mathbf{y}}$ para el problema dual, y las funciones objetivo de ambos problema coinciden con el valor $\mathbf{b}^T \tilde{\mathbf{y}} = \mathbf{c}^T \tilde{\mathbf{x}}$. De otra manera, uno o los dos conjuntos de soluciones factibles está vacío.*

Cuadro 3.1: Datos del problema de la planificación del carpintero.

	tipo de mesa		horas-máquina disponibles por día
	1	2	
Mecanizado primario (horas)	4	3	40
Mecanizado secundario (horas)	4	7	56
Beneficio(euros)	70	90	

Demostración. La demostración es simple teniendo en cuenta que, usando (3.27), se obtiene:

$$\mathbf{c}^T \tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{b}^T \tilde{\mathbf{y}} \leq \max_{\mathbf{y}} \{\mathbf{b}^T \mathbf{y} \mid \mathbf{A}^T \mathbf{y} \leq \mathbf{c}\} \leq \min_{\mathbf{x}} \{\mathbf{c}^T \mathbf{x} \mid \mathbf{A} \mathbf{x} \geq \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\} \leq \mathbf{c}^T \tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{b}^T \tilde{\mathbf{y}}$$

■

Por tanto, todas las desigualdades son de hecho igualdades y $\tilde{\mathbf{x}}$ e $\tilde{\mathbf{y}}$ deben ser soluciones óptimas de P y D respectivamente, tal y como establecía la hipótesis inicial.

El Corolario 3.1 establece que ambos problemas, el primal P y el dual D admiten, en general, soluciones óptimas simultáneamente.

En resumen, una de las siguientes afirmaciones es cierta:

1. Ambos problemas tienen soluciones óptimas, y sus valores coinciden.
2. Uno de los problemas no está acotado y el otro tiene una solución factible vacía.

Ejemplo ilustrativo 3.2 (problemas primal y dual del carpintero). Un carpintero modesto fabrica dos tipos de mesas de madera. Cada mesa de tipo 1 necesita 4 horas de mecanizado primario (preparación de piezas) y 4 horas de mecanizado secundario (ensamblado y barnizado). Análogamente, cada mesa de tipo 2 necesita 3 horas de mecanizado primario y 7 horas de mecanizado secundario. La maquinaria disponible permite un tiempo de mecanizado primario y secundario de 40 y 56 horas-máquina, respectivamente. Finalmente, cada mesa de tipo 1 le da un beneficio de 70 euros, mientras que cada mesa del tipo 2 le reporta 90 euros de beneficio. Estos valores se resumen en la Tabla 3.1.

Primal:

El objetivo del problema es maximizar el beneficio total diario, para lo cual necesitamos conocer el número de mesas que tiene que fabricar de cada tipo. Este problema puede formularse como un PPL de la siguiente manera:

$$\text{Maximizar } z = 70x_1 + 90x_2 \\ x_1, x_2$$

sujeto a

$$\begin{aligned} 4x_1 + 3x_2 &\leq 40 \\ 4x_1 + 7x_2 &\leq 56 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned} \tag{3.28}$$

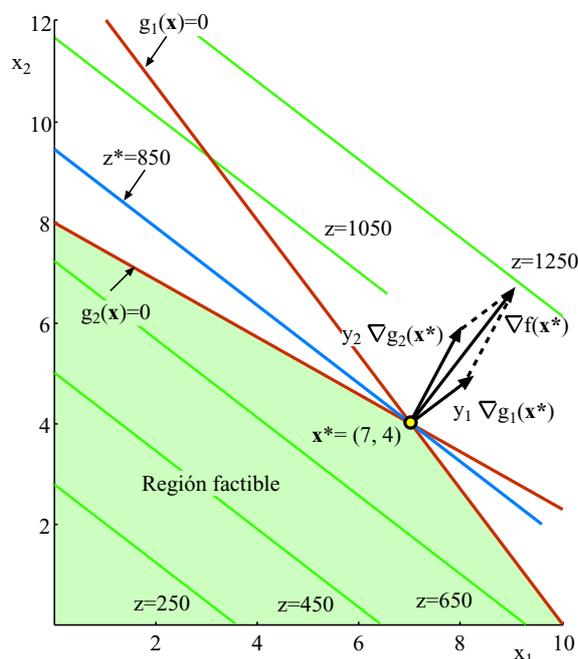


Figura 3.5: Representación gráfica del problema de la planificación del carpintero.

donde x_1 y x_2 son el número de mesas de tipo 1 y 2, respectivamente, que debe producir al día.

La solución óptima de este modelo, como puede verse en la Figura 3.5, es de una producción diaria de 7 mesas de tipo 1 y 4 mesas de tipo 2, con un beneficio máximo de 850 euros. Este resultado muestra que se utilizan todos los recursos de maquinaria disponibles, ya que las dos restricciones son activas.

Ahora supóngase que queremos aumentar los beneficios diarios. Se necesita por tanto aumentar la disponibilidad de maquinaria. Supóngase que se consigue aumentar el tiempo disponible de mecanizado secundario de 56 a 72 horas-máquina al día. ¿Cómo afectaría esta expansión en el beneficio diario? La respuesta se obtiene resolviendo el PPL,

$$\begin{aligned} \text{Maximizar } z &= 70x_1 + 90x_2 \\ x_1, x_2 \end{aligned}$$

sujeto a

$$\begin{aligned} 4x_1 + 3x_2 &\leq 40 \\ 4x_1 + 7x_2 &\leq 72 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned} \tag{3.29}$$

En este caso la solución óptima es $x_1 = 4$ y $x_2 = 8$ con un beneficio máximo diario de 1000 euros (véase la Figura 3.6). Esta solución muestra que podemos aumentar el beneficio diario en 150 euros sin más que aumentar la disponibilidad de maquinaria para el mecanizado secundario en $72 - 56 = 16$ horas-máquina al día. La tasa, $(1000 - 850)/16 = 150/16 = 75/8$, es la que aumenta la función objetivo con un incremento de 1 hora de disponibilidad

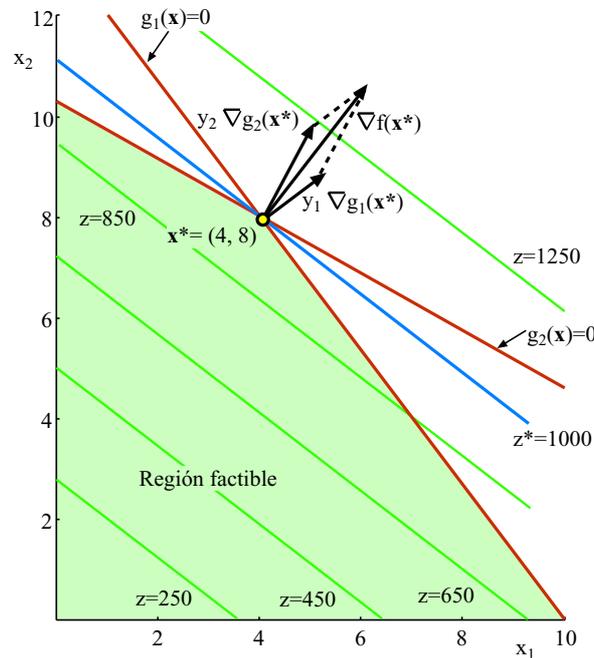


Figura 3.6: Representación gráfica del sistema expandido.

de maquinaria para el mecanizado secundario, se denomina *sensibilidad* o *precio sombra* (también *precio dual*) de la capacidad de mecanizado secundario.

En general, el precio sombra de una restricción proporciona el cambio en el valor de la función objetivo como resultado de un cambio unitario en el término independiente de la restricción, suponiendo que el resto de parámetros del problema permanecen inalterados. En muchos problemas de programación lineal los precios sombra son tan importantes como la solución del problema, ya que proporcionan información sobre el efecto en la función objetivo de cambios en los recursos disponibles. Los precios sombra pueden obtenerse resolviendo el *problema dual*.

Nótese que para los dos problemas (3.28) y (3.29), como permanecen activas las mismas restricciones, las variables duales son iguales.

Dual:

El problema dual del problema del carpintero (3.28) se formula de la siguiente manera.

$$\begin{aligned} &\text{Minimizar } z = 40y_1 + 56y_2 \\ & \quad y_1, y_2 \end{aligned}$$

sujeto a

$$\begin{aligned} 4y_1 + 4y_2 &\geq 70 \\ 3y_1 + 7y_2 &\geq 90 \\ y_1, y_2 &\geq 0 \end{aligned} \tag{3.30}$$

La solución de este problema es $y_1 = 65/8$, $y_2 = 75/8$ y un valor óptimo de 850. Obsérvese que y_1 e y_2 son los precios sombra de los recursos de mecanizado primario y secundario,

respectivamente, y que los valores de las funciones objetivo de los problemas (3.28) y (3.30) coinciden.

La interpretación del problema dual (3.30) es simple. Asumamos que el carpintero ha decidido dejar de trabajar, y que lo que quiere ahora es alquilar su maquinaria. Llamemos y_1 e y_2 a las variables que representan los precios de alquiler de la hora de mecanizado primario y secundario, respectivamente. Para que le sea más fácil arrendar la maquinaria decide poner el alquiler lo más barato posible siempre y cuando obtenga por lo menos el mismo nivel de beneficios que cuando vendía las mesas él mismo, para lo cual minimiza el coste de alquiler diario $40y_1 + 56y_2$, donde 40 y 56 representan la disponibilidad horaria diaria de cada tipo de maquinaria. Sometido a que el beneficio que obtiene del alquiler de cada máquina sea cuanto menos mayor que el beneficio que obtenía cuando las vendía, y por supuesto que el alquiler de cada máquina sea mayor que cero (restricciones en (3.30)). ■

3.4. Dualidad en programación no lineal

Es esta sección se generalizan los resultados obtenidos en programación lineal al caso no lineal. Considérese el problema no lineal siguiente como *problema primal*

$$\underset{\mathbf{x}}{\text{Minimizar}} \quad z_P = f(\mathbf{x}) \quad (3.31)$$

sujeto a

$$\begin{aligned} \mathbf{h}(\mathbf{x}) &= \mathbf{0} \\ \mathbf{g}(\mathbf{x}) &\leq \mathbf{0} \end{aligned} \quad (3.32)$$

donde $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $\mathbf{h} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^\ell$, $\mathbf{g} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$.

El *problema dual* requiere la introducción de la llamada *función dual* en el entorno de λ^* , μ^* como

$$\phi(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}) = \underset{\mathbf{x}}{\text{Infimum}} \{f(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{h}(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\mu}^T \mathbf{g}(\mathbf{x})\} \quad (3.33)$$

donde λ^* , μ^* son los multiplicadores asociados con las restricciones (3.32) para la solución óptima \mathbf{x}^* del problema (3.31)-(3.32).

El *problema dual* del problema primal (3.31)-(3.32) en esta situación se define como:

$$\underset{\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}}{\text{Maximizar}} \quad z_D = \phi(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}) \quad (3.34)$$

sujeto a

$$\boldsymbol{\mu} \geq \mathbf{0} \quad (3.35)$$

Usando la función lagrangiana

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}) = f(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{h}(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\mu}^T \mathbf{g}(\mathbf{x})$$

se puede reescribir el problema dual como

$$\underset{\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}; \boldsymbol{\mu} \geq \mathbf{0}}{\text{Maximizar}} \left[\underset{\mathbf{x}}{\text{Infimum}} \mathcal{L}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}) \right] \quad (3.36)$$

Comentario 3.4 Siempre se supondrá que f , \mathbf{h} , y \mathbf{g} son tales que el ínfimo de la función lagrangiana se alcanza en algún punto \mathbf{x} , de tal forma que el operador ‘ínfimo’ en (3.33) y (3.36) puede reemplazarse por el operador ‘mínimo’. Por este motivo al problema (3.36) se le conoce como problema dual max–min.

En esta situación, si llamamos $\mathbf{x}(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu})$ al punto en el que se alcanza el mínimo de la función lagrangiana (considerada como una función de los multiplicadores), se podrá escribir

$$\phi(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}) = f(\mathbf{x}(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu})) + \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{h}(\mathbf{x}(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu})) + \boldsymbol{\mu}^T \mathbf{g}(\mathbf{x}(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}))$$

■

Por otro lado, bajo las hipótesis de convexidad de las funciones f y \mathbf{g} , el Lagrangiano es localmente convexo en \mathbf{x} , y por tanto, el gradiente se debe anular en los mínimos

$$\nabla \phi(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}) = \nabla f(\mathbf{x}(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu})) + \boldsymbol{\lambda}^T \nabla \mathbf{h}(\mathbf{x}(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu})) + \boldsymbol{\mu}^T \nabla \mathbf{g}(\mathbf{x}(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu})) = \mathbf{0} \quad (3.37)$$

y

$$\nabla \phi(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}) = \nabla \mathcal{L}(\mathbf{x}(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}), \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}) = \mathbf{0} \quad (3.38)$$

Estas dos identidades pueden utilizarse para obtener unas expresiones para el gradiente y el hessiano de la función dual. Aplicando la regla de la cadena resulta

$$\begin{aligned} \nabla_{\boldsymbol{\mu}} \phi(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}) &= [\nabla f(\mathbf{x}(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu})) + \boldsymbol{\lambda}^T \nabla \mathbf{h}(\mathbf{x}(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu})) + \boldsymbol{\mu}^T \nabla \mathbf{g}(\mathbf{x}(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}))]^T \nabla_{\boldsymbol{\mu}} \mathbf{x}(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}) \\ &\quad + \mathbf{g}(\mathbf{x}(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu})) \end{aligned} \quad (3.39)$$

y por (3.37)

$$\nabla_{\boldsymbol{\mu}} \phi(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}) = \mathbf{g}(\mathbf{x}(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu})) \quad (3.40)$$

Pese a la apariencia problemática de la discontinuidad de (3.39) con respecto a $\boldsymbol{\mu}$, esto no es un problema en la práctica.

Similarmente

$$\nabla_{\boldsymbol{\lambda}} \phi(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}) = \mathbf{h}(\mathbf{x}(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu})) \quad (3.41)$$

esto es, el gradiente de la función dual es el vector de las restricciones evaluado en la solución óptima del lagrangiano.

Con lo referente al hessiano, nótese que la diferenciación de (3.40) y (3.41) con respecto a $\boldsymbol{\mu}$ y $\boldsymbol{\lambda}$, respectivamente, da lugar a

$$\nabla_{\boldsymbol{\mu}}^2 \phi(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}) = \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{g}(\mathbf{x}(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu})) \nabla_{\boldsymbol{\mu}} \mathbf{x}(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}) \quad (3.42)$$

y

$$\nabla_{\boldsymbol{\lambda}}^2 \phi(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}) = \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{h}(\mathbf{x}(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu})) \nabla_{\boldsymbol{\lambda}} \mathbf{x}(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}) \quad (3.43)$$

Para obtener una expresión para $\nabla_{\boldsymbol{\mu}} \mathbf{x}(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu})$ and $\nabla_{\boldsymbol{\lambda}} \mathbf{x}(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu})$, diferenciamos (3.38) con respecto a $\boldsymbol{\mu}$ y $\boldsymbol{\lambda}$, respectivamente. El resultado es

$$\nabla_{\mathbf{x}}^2 \mathcal{L}(\mathbf{x}(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}), \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}) \nabla_{\boldsymbol{\mu}} \mathbf{x}(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}) + \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{g}(\mathbf{x}(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu})) = \mathbf{0}$$

y una ecuación similar si reemplazamos λ por μ y \mathbf{h} por \mathbf{g} , es decir

$$\nabla_{\mathbf{x}}^2 \mathcal{L}(\mathbf{x}(\lambda, \mu), \lambda, \mu) \nabla_{\lambda} \mathbf{x}(\lambda, \mu) + \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{h}(\mathbf{x}(\lambda, \mu)) = \mathbf{0}$$

Teniendo en cuenta estas fórmulas en (3.42) y (3.43), se llega a

$$\nabla_{\mu}^2 \phi(\lambda, \mu) = -\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{g}(\mathbf{x}(\lambda, \mu)) [\nabla_{\mathbf{x}}^2 \mathcal{L}(\mathbf{x}(\lambda, \mu), \lambda, \mu)]^{-1} \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{g}(\mathbf{x}(\lambda, \mu))$$

y a una fórmula equivalente para $\nabla_{\lambda}^2 \phi(\lambda, \mu)$:

$$\nabla_{\lambda}^2 \phi(\lambda, \mu) = -\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{h}(\mathbf{x}(\lambda, \mu)) [\nabla_{\mathbf{x}}^2 \mathcal{L}(\mathbf{x}(\lambda, \mu), \lambda, \mu)]^{-1} \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{h}(\mathbf{x}(\lambda, \mu))$$

Finalmente, si lo que nos interesa son las segundas derivadas parciales mixtas los mismos cálculos conducen a

$$\nabla_{\lambda \mu}^2 \phi(\lambda, \mu) = -\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{g}(\mathbf{x}(\lambda, \mu)) [\nabla_{\mathbf{x}}^2 \mathcal{L}(\mathbf{x}(\lambda, \mu), \lambda, \mu)]^{-1} \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{h}(\mathbf{x}(\lambda, \mu))$$

y similarmente

$$\nabla_{\lambda \mu}^2 \phi(\lambda, \mu) = -\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{h}(\mathbf{x}(\lambda, \mu)) [\nabla_{\mathbf{x}}^2 \mathcal{L}(\mathbf{x}(\lambda, \mu), \lambda, \mu)]^{-1} \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{g}(\mathbf{x}(\lambda, \mu))$$

Para mostrar que la definición anterior de problema dual es equivalente a la Definición 3.2, válida para problemas de programación lineal, se muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo ilustrativo 3.3 (Programación lineal). Condidérese el siguiente problema primal:

$$\text{Minimizar } \mathbf{c}^T \mathbf{x} \tag{3.44}$$

sujeto a

$$\mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{a} \tag{3.45}$$

$$\mathbf{B} \mathbf{x} \leq \mathbf{b}. \tag{3.46}$$

Usando las reglas de la Sección 3.3.2 el problema dual es:

$$\text{Maximizar } \lambda^T \mathbf{a} + \mu^T \mathbf{b} \\ \lambda, \mu \tag{3.47}$$

sujeto a

$$\mathbf{A}^T \lambda + \mathbf{B}^T \mu = \mathbf{c} \tag{3.48}$$

and

$$\mu \leq \mathbf{0} \tag{3.49}$$

Por otro lado, la función Lagrangiana de (3.44)-(3.46) pasa a ser

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\mathbf{x}, \lambda, \mu) &= \mathbf{c}^T \mathbf{x} + \lambda^T (\mathbf{A} \mathbf{x} - \mathbf{a}) + \mu^T (\mathbf{B} \mathbf{x} - \mathbf{b}) \\ &= (\mathbf{c}^T + \lambda^T \mathbf{A} + \mu^T \mathbf{B}) \mathbf{x} - \lambda^T \mathbf{a} - \mu^T \mathbf{b} \end{aligned}$$

Para que esta función tenga mínimo se ha de cumplir que

$$(\mathbf{c}^T + \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{A} + \boldsymbol{\mu}^T \mathbf{B}) = \mathbf{0}$$

lo que lleva a

$$\boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{A} + \boldsymbol{\mu}^T \mathbf{B} = -\mathbf{c}^T$$

y el mínimo es

$$\phi(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}) = -\boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{a} - \boldsymbol{\mu}^T \mathbf{b}$$

Así, el problema dual se transforma en

$$\begin{array}{ll} \text{Maximizar} & -\boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{a} - \boldsymbol{\mu}^T \mathbf{b} \\ & \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu} \end{array}$$

sujeto a

$$\boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{A} + \boldsymbol{\mu}^T \mathbf{B} = -\mathbf{c}^T$$

y

$$\boldsymbol{\mu} \geq \mathbf{0}$$

que, cambiando los signos de $\boldsymbol{\lambda}$ y $\boldsymbol{\mu}$, es equivalente a (3.47)-(3.49).

Obsérvese que las variables duales son $\boldsymbol{\lambda}$ y $\boldsymbol{\mu}$. ■

Ejemplo ilustrativo 3.4 (Ejemplo numérico). Considérese el siguiente problema:

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & z_P = 40x_1 + 56x_2 \\ & x_1, x_2 \end{array}$$

sujeto a

$$\begin{array}{rcl} 4x_1 & +4x_2 & \geq 70 \\ 3x_1 & +7x_2 & \geq 90 \\ x_1, x_2 & & \geq 0 \end{array} \quad (3.50)$$

La solución óptima de este problema es $x_1 = 65/8$, $x_2 = 75/8$, con un valor de la función objetivo de 850.

Este problema puede escribirse como

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & z = 40x_1 + 56x_2 \\ & x_1, x_2 \end{array}$$

sujeto a

$$\begin{array}{rcl} -4x_1 & -4x_2 & \leq -70 \\ -3x_1 & -7x_2 & \leq -90 \\ -x_1 & & \leq 0 \\ & -x_2 & \leq 0 \end{array} \quad (3.51)$$

La función Lagrangiana para este problema es:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\mu}) &= 40x_1 + 56x_2 + \mu_1(-4x_1 - 4x_2 + 70) + \mu_2(-3x_1 - 7x_2 + 90) - \mu_3x_1 - \mu_4x_2 \\ &= (40 - 4\mu_1 - 3\mu_2 - \mu_3)x_1 + (56 - 4\mu_1 - 7\mu_2 - \mu_4)x_2 + 70\mu_1 + 90\mu_2 \end{aligned}$$

que tiene mínimo sólo si (obsérvese la no negatividad de x_1, x_2):

$$\begin{array}{rcccc} 4\mu_1 & +3\mu_2 & +\mu_3 & & = & 40 \\ 4\mu_1 & +7\mu_2 & & +\mu_4 & = & 56 \end{array}$$

El mínimo es

$$\phi(\boldsymbol{\mu}) = 70\mu_1 + 90\mu_2$$

Por tanto se puede concluir que el problema dual es:

$$\begin{array}{l} \text{Maximizar } \phi(\boldsymbol{\mu}) = 70\mu_1 + 90\mu_2 \\ \mu_1, \mu_2 \end{array} \quad (3.52)$$

sujeto a

$$\begin{array}{rcccc} 4\mu_1 & +3\mu_2 & +\mu_3 & & = & 40 \\ 4\mu_1 & +7\mu_2 & & +\mu_4 & = & 56 \\ \mu_1 & & & & \geq & 0 \\ & \mu_2 & & & \geq & 0 \\ & & \mu_3 & & \geq & 0 \\ & & & \mu_4 & \geq & 0 \end{array} \quad (3.53)$$

que, considerando μ_3 y μ_4 como variables de holgura es equivalente a:

$$\begin{array}{l} \text{Maximizar } z_D = 70\mu_1 + 90\mu_2 \\ \mu_1, \mu_2 \end{array} \quad (3.54)$$

$$\begin{array}{rcccc} 4\mu_1 & +3\mu_2 & \leq & 40 \\ 4\mu_1 & +7\mu_2 & \leq & 56 \\ \mu_1 & & \geq & 0 \\ & \mu_2 & \geq & 0 \end{array} \quad (3.55)$$

La solución óptima de este problema es $\mu_1 = 7$, $\mu_2 = 4$, con un valor de la función objetivo de 850.

Esto significa (véase la Tabla 3.2) que la función objetivo del problema primal z_p aumentará en 7 unidades por cada incremento unitario del término independiente de la restricción 70, y en 4 unidades por cada incremento unitario en 90, y que el valor objetivo de la función z_p aumentará en $65/8$ unidades por cada incremento unitario del lado derecho de la primera restricción 40, y $75/8$ con cada incremento unitario de la segunda restricción 56. ■

El siguiente teorema demuestra que cualquier valor de la función objetivo del problema dual es un límite inferior del valor óptimo de la función objetivo del problema primal. Este resultado puede utilizarse como criterio de parada de ciertos algoritmos en los que están presentes ambos valores.

Teorema 3.3 (Dualidad débil). *Para cualquier solución factible \mathbf{x} del problema primal (3.31)-(3.32) y para cualquier solución factible del dual (3.34)-(3.35), se cumple que*

$$f(\mathbf{x}) \geq \phi(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}) \quad (3.56)$$

Cuadro 3.2: Problemas primal y dual con las correspondientes soluciones para el ejemplo numérico.

Primal	Dual
Minimizar $z_P = 40x_1 + 56x_2$ x_1, x_2	Maximizar $z_D = 70\mu_1 + 90\mu_2$ μ_1, μ_2
sujeto a	sujeto a
$4x_1 + 4x_2 \geq 70$	$4\mu_1 + 3\mu_2 \leq 40$
$3x_1 + 7x_2 \geq 90$	$4\mu_1 + 7\mu_2 \leq 56$
$x_1 \geq 0$	$\mu_1 \geq 0$
$x_2 \geq 0$	$\mu_2 \geq 0$
Solución	
$x_1 = 65/8; x_2 = 75/8$	$\mu_1 = 7; \mu_2 = 4$

Demostración. De la definición de ϕ , para cualquier valor \mathbf{x} factible y para todo $\boldsymbol{\mu} \geq 0$; $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^m$ y $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^\ell$, se tiene

$$\phi(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}) = \inf_{\mathbf{y}} [f(\mathbf{y}) + \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{h}(\mathbf{y}) + \boldsymbol{\mu}^T \mathbf{g}(\mathbf{y})] \leq f(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{h}(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\mu}^T \mathbf{g}(\mathbf{x})$$

y

$$f(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{h}(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\mu}^T \mathbf{g}(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{x})$$

porque para que sean soluciones factibles $\mathbf{h}(\mathbf{x}) = 0$ y $\boldsymbol{\mu}^T \mathbf{g}(\mathbf{x}) < 0$, por tanto

$$\phi(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}) \leq f(\mathbf{x})$$

■

Si las regiones factibles de ambos problemas (primal y dual) son no vacías, entonces (3.56) implica que $\sup \phi$ e $\inf f$, sobre sus respectivos conjuntos factibles, son finitos. Ciertamente, ni el *supremo* ni el *ínfimo* tienen que alcanzarse necesariamente en sus conjuntos factibles. Si así lo fuese, la relación (3.56) garantizaría que serían soluciones óptimas del problema primal y dual respectivamente.

Un corolario de gran interés práctico es el siguiente.

Corolario 3.2 (Optimalidad primal y dual)

1. La siguiente relación siempre se cumple

$$\sup\{\phi(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}) \mid \boldsymbol{\mu} \geq \mathbf{0}\} \leq \inf\{f(\mathbf{x}) \mid \mathbf{h}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}, \mathbf{g}(\mathbf{x}) \leq \mathbf{0}\} \quad (3.57)$$

2. Si $f(\mathbf{x}^*) = \phi(\boldsymbol{\lambda}^*, \boldsymbol{\mu}^*)$ para alguna solución factible \mathbf{x}^* del problema primal (3.31)-(3.32) y para alguna solución factible $(\boldsymbol{\lambda}^*, \boldsymbol{\mu}^*)$ del problema dual (3.34)-(3.35), entonces \mathbf{x}^* y $(\boldsymbol{\lambda}^*, \boldsymbol{\mu}^*)$ son las soluciones óptimas del problema primal y dual, respectivamente. Esta solución define un punto de silla del Lagrangiano, que corresponde a un máximo con respecto a $\boldsymbol{\lambda}$ y $\boldsymbol{\mu}$ y a

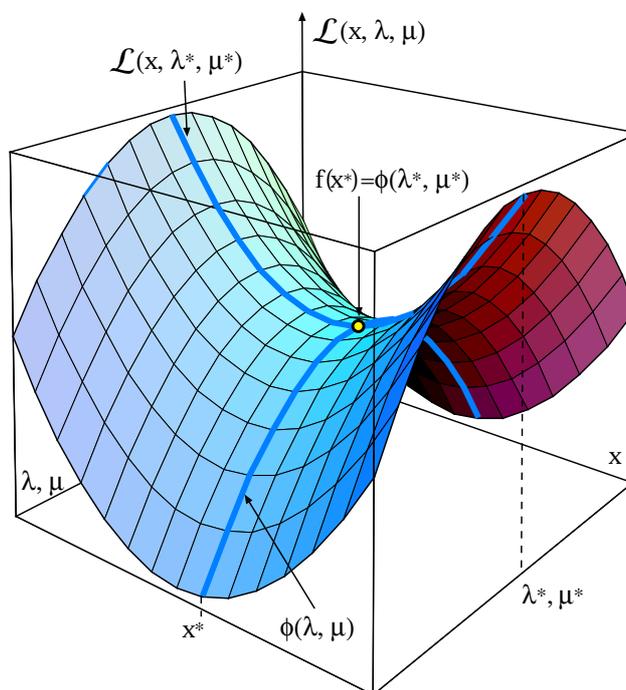


Figura 3.7: Ilustración gráfica del punto de silla del Lagrangiano en el punto $(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*, \boldsymbol{\mu}^*)$.

un mínimo con respecto a \mathbf{x} (véase la Figura 3.7).

3. Si $\sup\{\phi(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}) : \boldsymbol{\mu} \geq \mathbf{0}\} = +\infty$, entonces el problema primal no tiene solución factible.
4. Si $\inf\{f(\mathbf{x}) : \mathbf{h}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}, \mathbf{g}(\mathbf{x}) \leq \mathbf{0}\} = -\infty$, entonces $\phi(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}) = -\infty$ para todo $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^\ell$ y $\boldsymbol{\mu} \geq \mathbf{0}$.

Si la ecuación (3.57) no se cumple como igualdad, es de especial interés la definición de holgura de dualidad.

Definición 3.3 (Holgura de dualidad). La diferencia

$$\sup\{\phi(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}) | \boldsymbol{\mu} \geq \mathbf{0}\} - \inf\{f(\mathbf{x}) | \mathbf{h}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}, \mathbf{g}(\mathbf{x}) \leq \mathbf{0}\}$$

se llama holgura de dualidad de los problemas (3.31)-(3.32) y (3.34)-(3.35). ■

Si un determinado vector de multiplicadores resuelve el problema dual y no existe *holgura de dualidad*, es decir, que la relación (3.57) se cumple de forma estricta, entonces, las soluciones del Lagrangiano asociado con esos multiplicadores son soluciones del problema primal. Este resultado muestra una forma de resolver el problema primal mediante el dual. La cuestión fundamental es encontrar las condiciones que garanticen la no existencia de holgura dual, como ocurre en los problemas convexos.

Teorema 3.4 (Teorema de la dualidad para problemas convexos). *Considérese un problema localmente convexo como el(3.31)-(3.32). Si \mathbf{x}^* resuelve el problema primal, entonces su vector de multiplicadores asociado $(\boldsymbol{\lambda}^*, \boldsymbol{\mu}^*)$ resuelve el problema dual, y $\boldsymbol{\mu}^{*T} \mathbf{g}(\mathbf{x}^*) = 0$. Recíprocamente, si $(\boldsymbol{\lambda}^*, \boldsymbol{\mu}^*)$ resuelve el problema dual, y existe una solución \mathbf{x}^* , del problema lagrangiano asociado a ese vector de multiplicadores que cumple $\boldsymbol{\mu}^{*T} \mathbf{g}(\mathbf{x}^*) = 0$, entonces \mathbf{x}^* es la solución óptima del problema primal.*

Demostración. Si \mathbf{x}^* resuelve el problema primal y $(\boldsymbol{\mu}^*, \boldsymbol{\lambda}^*)$ es su vector de multiplicadores asociado, sabemos que deben cumplir las condiciones de KKT

$$\begin{aligned} \nabla f(\mathbf{x}^*) + \boldsymbol{\lambda}^{*T} \nabla \mathbf{h}(\mathbf{x}^*) + \boldsymbol{\mu}^{*T} \nabla \mathbf{g}(\mathbf{x}^*) &= \mathbf{0} \\ \boldsymbol{\mu}^{*T} \mathbf{g}(\mathbf{x}^*) &= 0 \\ \boldsymbol{\mu}^* &\geq \mathbf{0} \\ \mathbf{g}(\mathbf{x}^*) &\leq \mathbf{0} \\ \mathbf{h}(\mathbf{x}^*) &= \mathbf{0} \end{aligned}$$

Seguidamente, se considera el problema de minimización definido por $\phi(\boldsymbol{\lambda}^*, \boldsymbol{\mu}^*)$

$$\phi(\boldsymbol{\lambda}^*, \boldsymbol{\mu}^*) = \inf_{\mathbf{x}} \{f(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\lambda}^{*T} \mathbf{h}(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\mu}^{*T} \mathbf{g}(\mathbf{x})\}$$

La condición derivada del anterior sistema de KKT es

$$\nabla f(\mathbf{x}^*) + \boldsymbol{\lambda}^{*T} \nabla \mathbf{h}(\mathbf{x}^*) + \boldsymbol{\mu}^{*T} \nabla \mathbf{g}(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0}$$

que junto a la condición de convexidad local de la función objetivo (obsérvese que $\boldsymbol{\mu}^* \geq \mathbf{0}$)

$$f(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\lambda}^{*T} \mathbf{h}(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\mu}^{*T} \mathbf{g}(\mathbf{x})$$

implica que \mathbf{x}^* es un mínimo local para el problema determinado por $\phi(\boldsymbol{\lambda}^*, \boldsymbol{\mu}^*)$ y por tanto

$$\phi(\boldsymbol{\lambda}^*, \boldsymbol{\mu}^*) = f(\mathbf{x}^*).$$

Además, por el Corolario 3.2 el par $(\boldsymbol{\lambda}^*, \boldsymbol{\mu}^*)$ es solución óptima del problema dual. Nótese que la condición

$$\boldsymbol{\mu}^{*T} \mathbf{g}(\mathbf{x}^*) = 0$$

también se cumple.

Recíprocamente, supóngase que el par $(\boldsymbol{\lambda}^*, \boldsymbol{\mu}^*)$ es la solución óptima del problema dual, y que \mathbf{x}^* es la correspondiente solución del problema lagrangiano asociado, tal que $(\boldsymbol{\mu}^*)^T \mathbf{g}(\mathbf{x}^*) = 0$. Aplicando las condiciones de KKT al dual, es fácil obtener que

$$\nabla_{\boldsymbol{\mu}} \phi(\boldsymbol{\lambda}^*, \boldsymbol{\mu}^*) \leq \mathbf{0}, \quad \nabla_{\boldsymbol{\lambda}} \phi(\boldsymbol{\lambda}^*, \boldsymbol{\mu}^*) = \mathbf{0}$$

Pero, por (3.40) y (3.41), se obtiene

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}^*) \leq \mathbf{0}; \quad \mathbf{h}(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0}$$

Esto implica que \mathbf{x}^* es factible para el primal. Entonces

$$\phi(\boldsymbol{\lambda}^*, \boldsymbol{\mu}^*) = f(\mathbf{x}^*) + \boldsymbol{\lambda}^{*T} \mathbf{h}(\mathbf{x}^*) + \boldsymbol{\mu}^{*T} \mathbf{g}(\mathbf{x}^*) = f(\mathbf{x}^*)$$

y por el Corolario 3.2 resulta probado el teorema. ■

En lo que sigue, se obtendrán resultados relacionados con la sensibilidad, muy útiles desde el punto de vista práctico.

Teorema 3.5 (Sensibilidad mediante las variables duales). *Considérese el siguiente problema primal no lineal*

$$\underset{\mathbf{x}}{\text{Minimizar}} \quad z_P = f(\mathbf{x}) \quad (3.58)$$

sujeto a

$$\begin{aligned} \mathbf{h}(\mathbf{x}) &= \mathbf{a} \\ \mathbf{g}(\mathbf{x}) &\leq \mathbf{b} \end{aligned} \quad (3.59)$$

y su dual con $\boldsymbol{\lambda}$ y $\boldsymbol{\mu}$ como variables duales. Entonces, los valores de las variables duales dan las sensibilidades del valor óptimo de la función objetivo a cambios en las restricciones, es decir

$$\left. \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial a_k} \right|_{x^*} = -\lambda_k; \quad \left. \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial b_j} \right|_{x^*} = -\mu_j, \quad (3.60)$$

Demostración.

Si existen los valores óptimos del problema primal y dual, cumplen que:

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) &= \phi(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}) = f(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{h}(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\mu}^T \mathbf{g}(\mathbf{x}) - \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{a} - \boldsymbol{\mu}^T \mathbf{b} \\ &= f(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{h}(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\mu}^T \mathbf{g}(\mathbf{x}) - \sum_{k=1}^{\ell} \lambda_k a_k - \sum_{j=1}^m \mu_j b_j \end{aligned}$$

entonces, se tiene (3.60), lo que prueba que los valores de las variables duales son las sensibilidades de la función objetivo a cambios en los términos independientes de las restricciones (3.59). ■

Ejemplo ilustrativo 3.5 (Problema dual). Considérese el siguiente problema primal.

$$\underset{x_1, x_2}{\text{Minimizar}} \quad z_P = x_1^2 + x_2^2$$

sujeto a

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\leq 4 \\ -x_1 &\leq 0 \\ -x_2 &\leq 0 \end{aligned}$$

la única solución para este problema es $(x_1^*, x_2^*) = (0, 0)$ con un valor óptimo de la función objetivo de 0. Ahora, formulemos el problema dual. Para ello, primero, se necesita encontrar la función dual:

$$\begin{aligned}\phi(\mu_1, \mu_2, \mu_3) &= \min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2} \{x_1^2 + x_2^2 + \mu_1(x_1 + x_2 - 4) + \mu_2(-x_1) + \mu_3(-x_2)\} \\ &= \min_{x_1} \{x_1^2 + (\mu_1 - \mu_2)x_1\} + \min_{x_2} \{x_2^2 + (\mu_1 - \mu_3)x_2\} - 4\mu_1\end{aligned}$$

Después de una serie de operaciones, llegamos a la expresión explícita de la función

$$\phi(\boldsymbol{\mu}) = -\frac{1}{4}[(\mu_1 - \mu_2)^2 + (\mu_1 - \mu_3)^2] - 4\mu_1$$

y el problema dual se convierte en

$$\begin{array}{ll}\text{Supremum} & \phi(\boldsymbol{\mu}) \\ \boldsymbol{\mu} \geq 0 & \end{array}$$

Nótese que la función dual es cóncava. El óptimo de la función dual se alcanza cuando $\mu_1^* = \mu_2^* = \mu_3^* = 0$ y $z_d^* = \phi(\boldsymbol{\mu}^*) = 0$. ■

En este punto, es importante resaltar que determinados problemas conviene tratarlos utilizando la dualidad parcial, en el sentido de que sólo algunas de las restricciones se dualicen. Las restantes se incorporarán tal cual a la definición de función dual. Este es el caso de las técnicas de descomposición Lagrangiana.

Capítulo 4

Técnicas de Optimización por Descomposición

4.1. Introducción

En ingeniería, la mayoría de los problemas planteados desde el punto de vista de la optimización presentan muchos problemas por tener un gran tamaño; así se pueden encontrar miles de ecuaciones y/o incógnitas, o problemas que por su estructura están compuestos por múltiples problemas de optimización, o con restricciones asociadas a la salida de algún otro programa, como problemas de optimización combinada con elementos finitos, o con otros problemas de optimización. Una alternativa a la clásica, de tratar de resolver todo el problema en conjunto, es la de tratar de descomponerlo en problemas más pequeños y resolverlo de forma distribuida.

Uno de los casos en los que estas técnicas pueden tener gran interés es en los problemas de optimización combinados con estudios de fiabilidad, que se caracterizan por tener dos niveles: el nivel 1, es la optimización global de todas las variables de diseño \mathbf{d} , para determinar los valores deterministas, esperados o característicos de las mismas, y el nivel 2 en el que se estima la fiabilidad mediante un problema de optimización que se estudiará más adelante. Este problema, claramente está descompuesto en dos etapas.

Otro campo en el que pueden tener gran interés es en el tratamiento desacoplado de problemas, como por ejemplo, problemas asociados a la optimización y fiabilidad de estructuras en combinación con elementos finitos (véase Enevoldsen y Sorensen ([72]) y Frangopol y Hendawi ([81])). Problema en el que se han logrado resolver con éxito ejemplos de dimensiones pequeñas y moderadas, pero de los que se precisan técnicas para resolución de problemas mayores.

Para poder aplicar estas técnicas de forma ventajosa, el problema considerado ha de tener una estructura adecuada. En la práctica surgen dos estructuras bien definidas. La primera se caracteriza por restricciones de complicación, es decir, restricciones que si se eliminan simplifican el problema de forma considerable. Y la segunda, está caracterizada por las variables de complicación, que en caso de ser fijas, o no existir, hacen que el problema se simplifique considerablemente.

4.2. Descomposición de Benders para Variables de Complicación

4.2.1. Introducción

En esta sección se analiza la descomposición de Benders para problemas con una estructura descomponible y con variables de complicación.

4.2.2. Descomposición de Benders

La estructura requerida para poder aplicar Benders de forma ventajosa es

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \\ & \mathbf{x}, \mathbf{y} \end{array} \quad (4.1)$$

sujeto a

$$\mathbf{c}(\mathbf{x}) \leq \mathbf{0} \quad (4.2)$$

$$\mathbf{d}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq \mathbf{0} \quad (4.3)$$

$$\mathbf{x}^{\text{lo}} \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{x}^{\text{up}} \quad (4.4)$$

$$\mathbf{y}^{\text{lo}} \leq \mathbf{y} \leq \mathbf{y}^{\text{up}} \quad (4.5)$$

donde $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$, $f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$, $\mathbf{c}(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$, $\mathbf{d}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^q$, $\mathbf{x}^{\text{lo}} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{x}^{\text{up}} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{y}^{\text{lo}} \in \mathbb{R}^m$ e $\mathbf{y}^{\text{up}} \in \mathbb{R}^m$. El problema incluye tanto restricciones de igualdad como de desigualdad. El vector \mathbf{x} contiene las variables de complicación, es decir, variables que en caso de fijarse a un valor concreto, permiten una resolución más simple o descomponible.

A continuación se define la función $\alpha(\mathbf{x})$. Función que representa el coste total en función de las variables de complicación.

$$\alpha(\mathbf{x}) = \underset{\mathbf{y}}{\text{Mínimo}} f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \quad (4.6)$$

sujeto a

$$\mathbf{d}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq \mathbf{0} \quad (4.7)$$

$$\mathbf{y}^{\text{lo}} \leq \mathbf{y} \leq \mathbf{y}^{\text{up}}. \quad (4.8)$$

Mediante la función $\alpha(\mathbf{x})$, el problema original (4.1)-(4.5) puede expresarse como

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & \alpha(\mathbf{x}) \\ & \mathbf{x} \end{array} \quad (4.9)$$

sujeto a

$$\mathbf{c}(\mathbf{x}) \leq \mathbf{0} \quad (4.10)$$

$$\mathbf{x}^{\text{lo}} \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{x}^{\text{up}}. \quad (4.11)$$

El procedimiento descrito a continuación genera aproximaciones cada vez mejores de la función $\alpha(\mathbf{x})$. Si las variables de complicación se fijan a valores concretos mediante restricciones de la forma, $\mathbf{x} \leftarrow \mathbf{x}^{(i)}$, de tal forma que $\mathbf{c}(\mathbf{x}^{(i)}) \leq 0$, el problema resultante es fácil de resolver. Este problema, se denomina subproblema, tiene la forma:

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \\ & \mathbf{y} \end{array} \quad (4.12)$$

sujeto a

$$\mathbf{d}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq \mathbf{0} \quad (4.13)$$

$$\mathbf{x}^{\text{lo}} \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{x}^{\text{up}} \quad (4.14)$$

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}^{(i)} : \boldsymbol{\lambda}^{(i)}. \quad (4.15)$$

Típicamente, se puede descomponer en múltiples subproblemas. La solución da los valores de las variables de no complicación $\mathbf{y}^{(i)}$, y el vector de sensibilidades $\boldsymbol{\lambda}^{(i)}$, que contiene las variables duales asociadas a las restricciones que fijan los valores de las variables de complicación. También se puede obtener una cota superior de la función objetivo, ya que el problema (4.12)-(4.15) está más restringido que el original. El valor de la cota es $z_{\text{up}}^{(i)} = f(\mathbf{x}^{(i)}, \mathbf{y}^{(i)})$. La información obtenida resolviendo los subproblemas permite reproducir de forma más precisa el problema original. Más aún, si la función $\alpha(\mathbf{x})$ es convexa, el problema siguiente aproxima por debajo al problema original.

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & \alpha \\ & \alpha, \mathbf{x} \end{array} \quad (4.16)$$

sujeto a

$$\mathbf{c}(\mathbf{x}) \leq \mathbf{0} \quad (4.17)$$

$$\alpha \geq f(\mathbf{x}^{(i)}, \mathbf{y}^{(i)}) + \sum_{k=1}^n \lambda_k^{(i)} (x_k - x_k^{(i)}) \quad (4.18)$$

$$\mathbf{x}^{\text{lo}} \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{x}^{\text{up}} \quad (4.19)$$

La última restricción del problema se llama corte de Benders, mientras que el problema en su conjunto se denomina problema maestro. Nótese que el valor óptimo de la función objetivo de este problema es una cota inferior $z_{\text{lo}}^{(i)}$ del valor óptimo de la función objetivo del problema original. Esto se debe a que el problema maestro es una versión relajada del problema original. La solución de este problema proporciona nuevos valores de las variables de complicación que se usan para resolver un nuevo subproblema. De forma que este nuevo subproblema proporcione información adicional para reproducir de forma más exacta la función original. El procedimiento continuará hasta que los límites inferior y superior estén lo suficientemente próximos, proporcionando el valor óptimo de la función objetivo del problema original.

La descomposición de Benders funciona de la siguiente manera:

Algoritmo 4.1 (Descomposición de Benders).

Paso 0: Iniciación de las variables. Se buscan unos valores iniciales de las variables de complicación \mathbf{x}_0 , de forma que $\mathbf{c}(\mathbf{x}_0) \leq \mathbf{0}$.

Se hace $\nu = 1$, $\mathbf{x}^{(\nu)} = \mathbf{x}_0$, $z_{\text{lo}}^{(\nu)} = -\infty$.

Paso 1. Resolución del subproblema. Resolver el subproblema o los subproblemas:

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \\ & \mathbf{y} \end{array}$$

sujeto a

$$\begin{array}{ll} \mathbf{d}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) & \leq \mathbf{0} \\ \mathbf{y}^{\text{lo}} \leq \mathbf{y} & \leq \mathbf{y}^{\text{up}} \\ \mathbf{x} & = \mathbf{x}^{(\nu)} : \boldsymbol{\lambda}^{(\nu)} \end{array}$$

La solución del subproblema o subproblemas proporciona los valores de $\mathbf{y}^{(\nu)}$, $f(\mathbf{x}^{(\nu)}, \mathbf{y}^{(\nu)})$, y $\boldsymbol{\lambda}^{(\nu)}$.

Actualizar la cota superior de la función objetivo, $z_{\text{up}}^{(\nu)} \leftarrow f(\mathbf{x}^{(\nu)}, \mathbf{y}^{(\nu)})$.

Paso 2: Comprobación de la convergencia . Comprobar la convergencia del método.

Si $|z_{\text{up}}^{(\nu)} - z_{\text{lo}}^{(\nu)}| / |z_{\text{lo}}^{(\nu)}| \leq \varepsilon$, la solución del problema con un nivel de precisión ε es

$$\begin{array}{l} \mathbf{x}^* = \mathbf{x}^{(\nu)} \\ \mathbf{y}^* = \mathbf{y}^{(\nu)}. \end{array}$$

En caso contrario, hacer $\nu \leftarrow \nu + 1$ e ir al paso 3.

Paso 3: Resolver el problema maestro. Resolver el problema.

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & \alpha \\ & \alpha, \mathbf{x} \end{array}$$

sujeto a

$$\begin{array}{ll} \alpha & \geq f(\mathbf{x}^{(i)}, \mathbf{y}^{(i)}) + \sum_{k=1}^n \lambda_k^{(i)} (x_k - x_k^{(i)}); \quad \forall i = 1, \dots, \nu \\ \mathbf{c}(\mathbf{x}) & \leq \mathbf{0} \\ \mathbf{x}^{\text{lo}} & \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{x}^{\text{up}} \end{array}$$

Nótese que en cada iteración se añade una restricción adicional. La solución del problema maestro proporciona un nuevo valor de las variables de complicación $\mathbf{x}^{(\nu)}$, y $\alpha^{(\nu)}$.

Actualizar la cota inferior de la función objetivo, $z_{\text{lo}}^{(\nu)} \leftarrow \alpha^{(\nu)}$, e ir al paso 1.

■

La convergencia del método está asegurada siempre y cuando la función $\alpha(\mathbf{x})$ en el entorno de la región factible de todas las variables sea convexa.

Ejemplo ilustrativo 4.1 (Aplicación de la descomposición de Benders a un problema no lineal). Considérese el problema

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & z = xy_2 + y_1y_2 \\ & x, y_1, y_2 \end{array}$$

sujeito a

$$\begin{array}{rcl} 4y_1 - x^2 & \leq & 5 \\ 2y_2^2 - \frac{xy_2}{3} & \leq & 2 \\ y_1 & \geq & 0 \\ x & \geq & 2 \\ x & \leq & 12 \end{array}$$

Los valores óptimos para este ejemplo son $x^* = 12$, $y_1^* = -37,25$ e $y_2^* = -0,41$ con un valor de la función objetivo igual a $z^* = -30,34$. Si se considera a x como variable de complicación, se puede resolver mediante la descomposición de Benders.

Paso 0: Iniciación. Se inicia el contador de iteraciones, $\nu = 1$. Como valor inicial de la variable de complicación se toma $x^{(1)} = 2$. El límite inferior de la función objetivo inicialmente vale $z_{\text{lo}}^1 = -\infty$.

Paso 1: Resolución del subproblema. Se resuelve el siguiente subproblema.

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & z = xy_2 + y_1y_2 \\ & x, y_1, y_2 \end{array}$$

sujeito a

$$\begin{array}{rcl} 4y_1 - x^2 & \leq & 5 \\ 2y_2^2 - \frac{xy_2}{3} & \leq & 2 \\ y_1 & \geq & 0 \\ x & = & 2 : \lambda \end{array}$$

cuya solución es $y_1^{(1)} = 2,25$, $y_2^{(1)} = -0,85$ y $\lambda^{(1)} = -2,81$ con un valor de la función objetivo de $z = -6,99$. El límite superior del óptimo de la función objetivo original se actualiza, $z_{\text{up}}^{(1)} = -6,99$.

Paso 2: Comprobación de la convergencia. La expresión $|z_{\text{up}}^{(1)} - z_{\text{lo}}^{(1)}| / |z_{\text{lo}}^{(1)}| = 1,0$ no es lo suficientemente pequeña, por tanto se hace $\nu \leftarrow \nu + 1 = 2$.

Paso 3: Resolución del problema maestro. Se resuelve el problema.

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & \alpha \\ & \alpha, x \end{array}$$

sujeto a

$$\begin{aligned} -6,99 - 2,81 \times (x - 2) &\leq \alpha \\ \alpha &\geq -50 \\ x &\geq 2 \\ x &\leq 12 \end{aligned}$$

La solución de este problema es $x^{(2)} = 12,00$ y $\alpha^{(2)} = -35,13$. La cota inferior del óptimo de la función objetivo original es $z_{lo}^{(2)} = -35,13$, y se va al paso 1.

Paso 1: Resolución del subproblema. Se resuelve el siguiente subproblema.

$$\begin{aligned} \text{Minimizar } z &= xy_2 + y_1y_2 \\ x, y_1, y_2 \end{aligned}$$

sujeto a

$$\begin{aligned} 4y_1 - x^2 &\leq 5 \\ 2y_2^2 - \frac{xy_2}{3} &\leq 2 \\ y_1 &\geq 0 \\ x &= 12 : \lambda \end{aligned}$$

cuya solución es $y_1^{(2)} = 37,25$, $y_2^{(2)} = -0,41$ y $\lambda^{(2)} = -1,94$ con un valor de la función objetivo de $z = -30,34$. El límite superior del óptimo de la función objetivo original se actualiza, $z_{up}^{(2)} = -30,34$.

Paso 2: Comprobación de la convergencia. La expresión $|z_{up}^{(2)} - z_{lo}^{(2)}|/|z_{lo}^{(2)}| = 0,136$ no es lo suficientemente pequeña, por tanto se hace $\nu \leftarrow \nu + 1 = 3$.

Paso 3: Resolución del problema maestro. Se resuelve el siguiente problema.

$$\begin{aligned} \text{Minimizar } \alpha \\ \alpha, x \end{aligned}$$

sujeto a

$$\begin{aligned} -6,99 - 2,81 \times (x - 2) &\leq \alpha \\ -30,34 - 1,94 \times (x - 12) &\leq \alpha \\ \alpha &\geq -50 \\ x &\geq 2 \\ x &\leq 12 \end{aligned}$$

La solución de este problema es $x^{(3)} = 12$ y $\alpha^{(3)} = -30,34$. El nuevo límite inferior del valor óptimo de la función objetivo original es $z_{lo}^{(3)} = -30,34$.

Paso 1: Resolución del subproblema. Se resuelve el problema.

$$\begin{aligned} \text{Minimizar } z &= xy_2 + y_1y_2 \\ x, y_1, y_2 \end{aligned}$$

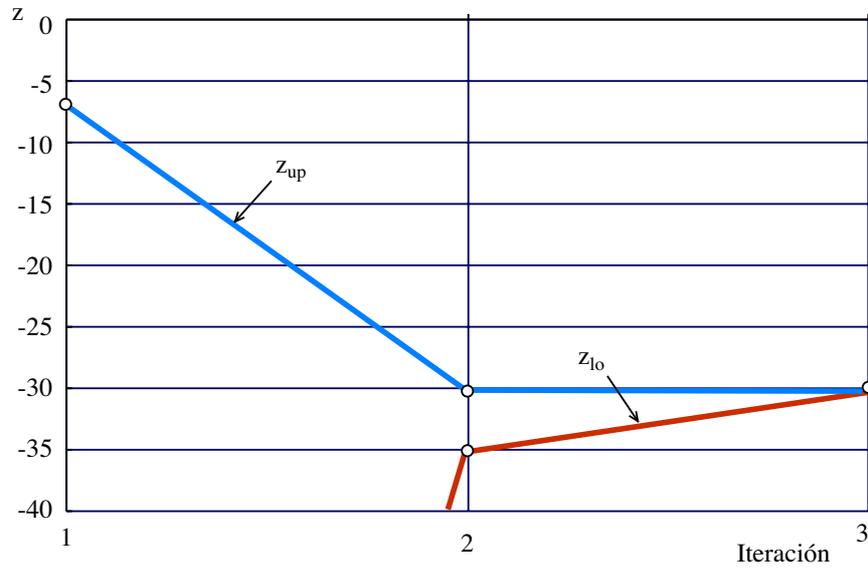


Figura 4.1: Evolución de los límites inferior y superior del valor óptimo de la función objetivo del problema del ejemplo ilustrativo 4.1.

sujeto a

$$\begin{aligned}
 4y_1 - x^2 &\leq 5 \\
 2y_2^2 - \frac{xy_2}{3} &\leq 2 \\
 y_1 &\geq 0 \\
 x &= 12 : \lambda
 \end{aligned}$$

cuya solución es $y_1^{(3)} = 37,25$, $y_2^{(3)} = -0,41$ y $\lambda^{(3)} = -1,94$ con un valor de la función objetivo de $z = -30,34$. El límite superior del óptimo de la función objetivo original se actualiza, $z_{up}^{(3)} = -30,34$.

Paso 2: Comprobación de la convergencia. La expresión $|z_{up}^{(3)} - z_{lo}^{(3)}|/|z_{lo}^{(3)}| = 0,0$ es lo suficientemente pequeña, por tanto la solución es $x^* = 12$, $y_1^* = -37,25$ y $y_2^* = -0,41$.

En la figura 4.1 se muestra la evolución del método para el ejemplo propuesto. En este caso se comprueba que el método converge a la solución exacta debido a que el valor óptimo de la variable de complicación x coincide con su límite superior.

■

4.3. Técnicas de Descomposición para Restricciones de Complicación

4.3.1. Introducción

En esta sección se analizan problemas no lineales con estructura descomponible y restricciones de complicación. Se describirá el problema genérico con su estructura y se hará una revisión de las metodologías existentes para su resolución. Por último se presentará un nuevo método de relajación aplicable a la resolución de problemas relacionados con la fiabilidad.

4.3.2. Restricciones de complicación

Los problemas con restricciones de complicación son aquellos en los que al eliminar esas restricciones presentan una estructura fácilmente descomponible en varios problemas más simples, o en uno sólo con una solución muy sencilla.

La estructura general de un problema con restricciones de complicación es la siguiente

$$\underset{\mathbf{x}}{\text{Minimizar}} \quad f(\mathbf{x}) \quad (4.20)$$

sujeto a

$$\mathbf{a}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \quad (4.21)$$

$$\mathbf{b}(\mathbf{x}) \leq \mathbf{0} \quad (4.22)$$

$$\mathbf{c}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \quad (4.23)$$

$$\mathbf{d}(\mathbf{x}) \leq \mathbf{0} \quad (4.24)$$

$$\mathbf{x}^{\text{lo}} \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{x}^{\text{up}} \quad (4.25)$$

donde $f(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $\mathbf{a}(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n_a}$, $\mathbf{b}(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n_b}$, $\mathbf{c}(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n_c}$, $\mathbf{d}(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n_d}$, y n_a , n_b , n_c y n_d son escalares. Las restricciones $\mathbf{c}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$, y $\mathbf{d}(\mathbf{x}) \leq \mathbf{0}$ son las restricciones de complicación, de tal forma que si se relajan, el problema (4.20)-(4.25) se simplifica considerablemente.

Para resolver este tipo de problemas de forma descompuesta, se van a presentar de forma breve tres procedimientos: relajación lagrangiana, relajación lagrangiana aumentada y descomposición de las condiciones de optimalidad.

4.3.3. Relajación Lagrangiana

En esta subsección se explicará de forma breve y concisa la primera de las metodologías para resolver el problema (4.20)-(4.24). Una de las posibles formas de eliminar las restricciones (4.23) y (4.24) es incorporándolas a la función objetivo mediante la función Lagrangiana, que en este caso se define como (véase Bazaraa [14] y Luenberger [113]):

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}) = f(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{c}(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\mu}^T \mathbf{d}(\mathbf{x}), \quad (4.26)$$

donde $\boldsymbol{\lambda}$ y $\boldsymbol{\mu}$ son los vectores de los multiplicadores de Lagrange. Bajo condiciones de convexidad local ($\nabla_{\mathbf{x}}^2 \mathcal{L}(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*, \boldsymbol{\mu}^*) > \mathbf{0}$, donde \mathbf{x}^* , $\boldsymbol{\lambda}^*$ y $\boldsymbol{\mu}^*$ son los valores óptimos) la

función dual se define como

$$\phi(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}) = \underset{\mathbf{x}}{\text{Mínimo}} \mathcal{L}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}) \quad (4.27)$$

sujeto a

$$\mathbf{a}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \quad (4.28)$$

$$\mathbf{b}(\mathbf{x}) \leq \mathbf{0} \quad (4.29)$$

$$\mathbf{x}^{\text{lo}} \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{x}^{\text{up}} \quad (4.30)$$

La función dual es cóncava y en general no diferenciable. Esta es la principal ventaja que utiliza esta metodología. Así, se define el problema dual como

$$\underset{\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}}{\text{Maximizar}} \phi(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}) \quad (4.31)$$

sujeto a

$$\boldsymbol{\mu} \geq \mathbf{0} \quad (4.32)$$

La relajación lagrangiana es un método atractivo si la función dual es fácilmente evaluable para valores fijos $\hat{\boldsymbol{\lambda}}$ y $\hat{\boldsymbol{\mu}}$ de los vectores de los multiplicadores $\boldsymbol{\lambda}$ y $\boldsymbol{\mu}$ respectivamente. En otras palabras, si es fácil resolver el problema primal relajado para $\hat{\boldsymbol{\lambda}}$ y $\hat{\boldsymbol{\mu}}$ dados, es decir

$$\underset{\mathbf{x}}{\text{Minimizar}} \mathcal{L}(\mathbf{x}, \hat{\boldsymbol{\lambda}}, \hat{\boldsymbol{\mu}}) \quad (4.33)$$

sujeto a

$$\mathbf{a}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \quad (4.34)$$

$$\mathbf{b}(\mathbf{x}) \leq \mathbf{0} \quad (4.35)$$

$$\mathbf{x}^{\text{lo}} \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{x}^{\text{up}} \quad (4.36)$$

El problema anterior típicamente se descompone en subproblemas

$$\underset{\mathbf{x}_i; i=1, \dots, n}{\text{Minimizar}} \sum_{i=1}^n \mathcal{L}_i(\mathbf{x}_i, \hat{\boldsymbol{\lambda}}, \hat{\boldsymbol{\mu}}) \quad (4.37)$$

sujeto a

$$\mathbf{a}_i(\mathbf{x}_i) = \mathbf{0}; \quad i = 1, \dots, n \quad (4.38)$$

$$\mathbf{b}_i(\mathbf{x}_i) \leq \mathbf{0}; \quad i = 1, \dots, n \quad (4.39)$$

$$\mathbf{x}_i^{\text{lo}} \leq \mathbf{x}_i \leq \mathbf{x}_i^{\text{up}}; \quad i = 1, \dots, n \quad (4.40)$$

Esta descomposición facilita su solución, y normalmente tiene interpretaciones físicas y económicas. El problema (4.37)-(4.40) se llama problema primal descompuesto, en el que pueden resolver los diferentes subproblemas independientemente los unos de los otros.

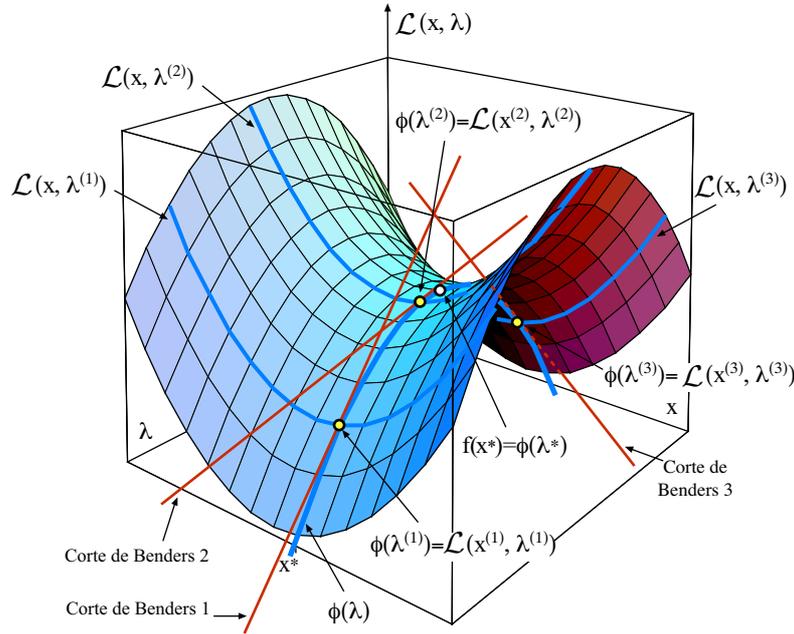


Figura 4.2: Ilustración gráfica de la reconstrucción por hiperplanos de la función dual $\phi(\lambda)$.

Bajo condiciones de convexidad local, el teorema de la dualidad local establece que

$$f(\mathbf{x}^*) = \phi(\lambda^*, \mu^*) \quad (4.41)$$

donde \mathbf{x}^* es el minimizador del problema primal y (λ^*, μ^*) es el maximizador del problema dual.

En el caso no convexo, dada una solución para el problema primal, \mathbf{x} , y una solución factible para el problema dual, (λ, μ) , el teorema de la dualidad débil establece que

$$f(\mathbf{x}^*) \geq \phi(\lambda^*, \mu^*) \quad (4.42)$$

Por tanto en el caso convexo, la solución del problema dual es la misma que la del primal, y en el caso no convexo el valor óptimo de la función dual es una cota inferior del valor óptimo del problema primal.

Como se ha visto este método trata de resolver el problema global reconstruyendo la función dual, de forma muy similar a como la descomposición de Benders recomponía la función α para distintos valores de las variables de complicación. Así, los vectores de los multiplicadores (λ, μ) son las variables de complicación.

Hay varios métodos para actualizar los valores de los multiplicadores, son los siguientes:

Método del Subgradiente. El vector de holguras de las restricciones en la iteración ν constituye un subgradiente de la función dual [14], es decir

$$\mathbf{s}^{(\nu)} = \text{columna} \left[\mathbf{c}(\mathbf{x}^{(\nu)}), \mathbf{d}(\mathbf{x}^{(\nu)}) \right] \quad (4.43)$$

Por tanto el vector de los multiplicadores se actualiza de la siguiente manera (véase Polyak [133]):

$$\boldsymbol{\theta}^{(\nu+1)} = \boldsymbol{\theta}^{(\nu)} + k^{(\nu)} \frac{\mathbf{s}^{(\nu)}}{|\mathbf{s}^{(\nu)}|} \quad (4.44)$$

Método de los hiperplanos cortantes. La actualización se obtiene resolviendo el siguiente problema de programación lineal

$$\begin{array}{ll} \text{Maximizar} & z \\ & z, \boldsymbol{\theta} \in C \end{array} \quad (4.45)$$

sujeto a

$$z \leq \phi^{(k)} + \mathbf{s}^{(k)T} (\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}^{(k)}); k = 1, \dots, \nu \quad (4.46)$$

donde C es un conjunto compacto compuesto por los rangos de variación de los multiplicadores, es decir $C = \{\boldsymbol{\theta} = (\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu})^T, \boldsymbol{\theta}^{\text{lo}} \leq \boldsymbol{\theta} \leq \boldsymbol{\theta}^{\text{up}}\}$. Nótese que este procedimiento de resolución es muy parecido al método de Benders pero con una función cóncava, en la figura 4.2 se muestra la reconstrucción por hiperplanos de la función dual.

Método de penalización. La actualización se obtiene resolviendo el siguiente problema de optimización cuadrática

$$\begin{array}{ll} \text{Maximizar} & z - \alpha^{(\nu)} |\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\Theta}^{(\nu)}|^2 \\ & z, \boldsymbol{\theta} \in C \end{array} \quad (4.47)$$

sujeto a

$$z \leq \phi^{(k)} + \mathbf{s}^{(k)T} (\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}^{(k)}); k = 1, \dots, \nu \quad (4.48)$$

donde α es un parámetro de penalización, $|\cdot|$ es la norma Euclídea y $\boldsymbol{\Theta}$, es el “centro de gravedad”, un vector de multiplicadores centrado en la zona de interés para evitar oscilaciones (véase Hiriart [93]).

Método de la región de confianza. Para la actualización se resuelve el siguiente problema de optimización

$$\begin{array}{ll} \text{Maximizar} & z \\ & z, \boldsymbol{\theta} \in C^{(\nu)} \end{array} \quad (4.49)$$

sujeto a

$$z \leq \phi^{(k)} + \mathbf{s}^{(k)T} (\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}^{(k)}); k = 1, \dots, n; n \leq \bar{n} \quad (4.50)$$

donde \bar{n} es el número máximo de restricciones consideradas en el problema anterior y $C^{(\nu)}$ es un vector dinámicamente actualizado definiendo la región de factibilidad de los multiplicadores.

4.3.4. Relajación Lagrangiana Aumentada

La relajación lagrangiana aumentada es una variante de la relajación lagrangiana en la que se trabaja con una función lagrangiana aumentada de la forma (véase Luenberger [113], Cohen[48] o Bertsekas [15]):

$$\mathcal{A}(\mathbf{x}, \mathbf{z}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}, \alpha, \beta) = f(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{c}(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\mu}^T \hat{\mathbf{d}}(\mathbf{x}, \mathbf{z}) + \frac{1}{2} \alpha \|\mathbf{c}(\mathbf{x})\|^2 + \frac{1}{2} \beta \|\hat{\mathbf{d}}(\mathbf{x}, \mathbf{z})\|^2 \quad (4.51)$$

donde α y β son parámetros de actualización lo suficientemente grandes como para asegurar la convexidad local, la componente i de la función $\hat{\mathbf{d}}(\mathbf{x}, \mathbf{z})$ se define como $\hat{d}_i(\mathbf{x}, \mathbf{z}) = d_i(\mathbf{x}) + z_i^2$, y las variables z_i ; $i = 1, \dots, n_d$ son variables de holgura que transforman las restricciones de igualdad en restricciones de desigualdad.

Nótese que los términos cuadráticos confieren a la función Lagrangiana aumentada buenas propiedades de convexidad local.

4.3.5. Descomposición de las Condiciones de Optimalidad

Esta técnica de descomposición puede considerarse como una implementación particular del método de relajación Lagrangiana. Está motivada por una descomposición natural de las condiciones de optimalidad del problema original. Un análisis profundo del desarrollo de esta técnica puede encontrarse en Conejo [49].

Por conveniencia, el problema (4.20)-(4.24) puede reescribirse como

$$\underset{\mathbf{x}_a}{\text{minimizar}} \quad \sum_{a=1}^A f_a(\mathbf{x}_a) \quad (4.52)$$

sujeto a

$$\mathbf{h}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_A) \leq \mathbf{0} \quad (4.53)$$

$$\mathbf{g}_a(\mathbf{x}_a) \leq \mathbf{0} \quad a = 1, \dots, A \quad (4.54)$$

$$\mathbf{x}_a^{\text{lo}} \leq \mathbf{x}_a \leq \mathbf{x}_a^{\text{up}} \quad a = 1, \dots, A \quad (4.55)$$

donde \mathbf{x}_a son las variables de complicación para cada bloque a en los que se descompone el problema original. Nótese que las ecuaciones (4.53) y (4.54) representan restricciones de igualdad y de desigualdad. Las restricciones de complicación son las (4.53) ya que contienen variables asociadas a bloques diferentes e impiden la descomposición del problema en bloques para resolverlos de forma independiente (subproblemas). Por tanto es necesario eliminarlas para poder hacerlo. Las restricciones (4.54) contienen sólo variables pertenecientes al bloque a para $a = 1, \dots, A$. La descomposición propuesta procede de la siguiente manera, transforma el problema original (4.52)-(4.54) en el equivalente

$$\text{Minimizar} \quad \sum_{a=1}^A f_a(\mathbf{x}_a) + \sum_{a=1}^A \boldsymbol{\lambda}_a^T \mathbf{h}_a(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_A) \quad (4.56)$$

sujeto a

$$\mathbf{h}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_A) \leq \mathbf{0} \quad a = 1, \dots, A \quad (4.57)$$

$$\mathbf{g}_a(\mathbf{x}_a) \leq \mathbf{0} \quad a = 1, \dots, A \quad (4.58)$$

$$\mathbf{x}_a^{\text{lo}} \leq \mathbf{x}_a \leq \mathbf{x}_a^{\text{up}} \quad a = 1, \dots, A \quad (4.59)$$

donde las restricciones (4.53) se han separado en bloques diferentes. Nótese que la distribución de las restricciones no afecta a la solución del problema, es decir, podrían distribuirse aleatoriamente.

Para valores fijos de todas las variables y multiplicadores no pertenecientes al bloque a , el problema (4.56)-(4.58) se reduce a

$$\text{Minimizar}_{\mathbf{x}_a} \quad k + f_a(\mathbf{x}_a) + \sum_{b=1, b \neq a}^A \bar{\lambda}_b^T \mathbf{h}_b(\bar{\mathbf{x}}_1, \dots, \bar{\mathbf{x}}_{a-1}, \mathbf{x}_a, \bar{\mathbf{x}}_{a+1}, \dots, \bar{\mathbf{x}}_A) \quad (4.60)$$

sujeto a

$$\mathbf{h}_a(\bar{\mathbf{x}}_1, \dots, \bar{\mathbf{x}}_{a-1}, \mathbf{x}_a, \bar{\mathbf{x}}_{a+1}, \dots, \bar{\mathbf{x}}_A) \leq \mathbf{0}, \quad (4.61)$$

$$\mathbf{g}_a(\mathbf{x}_a) \leq \mathbf{0}, \quad (4.62)$$

$$\mathbf{x}_a^{\text{lo}} \leq \mathbf{x}_a \leq \mathbf{x}_a^{\text{up}}, \quad (4.63)$$

donde $k = \sum_{b=1, b \neq a}^A f_b(\bar{\mathbf{x}}_b)$ es una constante. La variable dual asociada a la restricción (4.61) se denomina λ_a . El problema reducido (4.60)-(4.62) puede obtenerse para cada bloque del problema original. La descomposición propuesta se basa en la solución de estos problemas reducidos.

Las condiciones de optimalidad de primer orden del problema original (4.52)-(4.54) pueden obtenerse a partir de las condiciones de optimalidad de cada subproblema reducido (4.60)-(4.62) puestas juntas. Esta es la característica explotada en el método. La principal diferencia entre la Relajación Lagrangiana y este método es que en este último no es necesario actualizar los multiplicadores de Lagrange de las restricciones de complicación, porque se actualizan automáticamente por mantener las restricciones (4.61) en cada subproblema. Además, presenta la ventaja de que no necesita alcanzar la solución óptima en cada uno de los subproblemas de cada iteración, sino que sólo es necesaria una iteración en cada subproblema, con el significativo ahorro de tiempo computacional.

4.3.6. Aplicación a problemas de fiabilidad

Los métodos anteriores pueden aplicarse a todos los problemas basados en fiabilidad (RBSO) presentados en el capítulo 7, en concreto, en los que tenemos restricciones de complicación.

4.4. Problemas con Variables y Restricciones de Complicación

Cuando el problema considerado tiene tanto variables como restricciones de complicación, se debe aplicar un método de descomposición combinado. Por ejemplo, una descomposición externa de Benders puede tratar las variables de complicación, mientras que las restricciones de complicación se resuelven mediante una relajación lagrangiana interna.

4.5. Paquetes de Optimización

Dado que las técnicas explicadas en las secciones anteriores se pueden aplicar mediante cualquier paquete o rutina de optimización, se presentarán a continuación una serie de alternativas existentes en el mercado que permitirían resolver todos los problemas relativos a fiabilidad.

Los paquetes de optimización son programas con un lenguaje de programación propio que permiten el modelado, análisis y resolución de múltiples problemas de optimización. La ventaja que tienen es que trabajan con algoritmos de optimización estándar contrastados y no es preciso que el usuario tenga un conocimiento exhaustivo del funcionamiento de los mismos aunque, lógicamente, cuanto más familiarizado se este con los métodos que utilice, mayor será el rendimiento.

Algunos de los existentes son:

AIMMS. El paquete AIMMS [125, 16] del Paragon Decision Technology B.V. en Haarlem.

AMPL. El paquete AMPL [78, 126] del Dash Optimization de Nueva York.

GAMS. El paquete GAMS [127] pertenece a la GAMS Development Corp. de Washington. GAMS también está disponible para clientes europeos en el ARKI Consulting & Development A/S en Bagsvaerd, Dinamarca, o en GAMS Software GmbH en Colonia, Alemania.

LINDO y What's Best. El paquete [128] pertenece a LINDO Systems, Inc. en Chicago.

MPL. Este paquete [129] pertenece al Maximal Software Inc, en Arlington.

En todos los trabajos realizados para esta tesis se ha optado por el GAMS (General Algebraic Modeling System) dada la familiaridad con su lenguaje de programación. De todos los algoritmos que puede utilizar el programa se ha optado por utilizar siempre el optimizador CONOPT, especialmente diseñado para trabajar con problemas no lineales de larga escala, y que ha demostrado tener un comportamiento muy bueno con problemas relativos a fiabilidad. Está basado en el método del gradiente reducido generalizado (GRG, 'Generalized Reduced Gradient Method') y ha sido elegido por su eficiencia y fiabilidad para resolver un amplio abanico de modelos. El método GRG original mejora la convergencia para modelos con un gran número de no linealidades, es decir, con modelos complicados. De ahí que sea preferible la utilización de este optimizador en modelos muy no lineales que en aquellos en los que es complicado alcanzar la factibilidad. Además se han introducido subrutinas de todo tipo, como las de programación lineal secuencial, que hacen que el método sea eficiente en problemas poco o medianamente no lineales.

Este optimizador está especialmente diseñado para la resolución de problemas grandes de tipo 'sparse', y puede trabajar con problemas que tienen del orden de 10000 restricciones. De hecho, el factor limitante del método es el número de variables superbásicas, más que el número total de variables o restricciones, es decir, el número de grados de libertad en el entorno del punto óptimo. Con más de 150 variables superbásicas puede dar problemas de convergencia, especialmente si está mal escalado.

Como vemos, por las características del optimizador, parece claro que es un método adecuado para la resolución de problemas relativos a la fiabilidad, en los que intervienen un gran número de variables en su mayoría auxiliares y sometidos a grandes no linealidades. Este comportamiento se debe o bien a la transformación de Rosenblatt, o a la obtención de las ecuaciones de estado límite. Además, en problemas asociados a la optimización en ingeniería independientemente de la fiabilidad, la mayoría de las variables son dependientes y con una gran cantidad de ecuaciones de igualdad, es decir, que el número de variables superbásicas es reducido.

4.5.1. Método del Gradiente Reducido Generalizado

En esta subsección se presenta el método del gradiente reducido generalizado (para más detalles véase VanderPlaats [164] o Bazaraa, Jarvis y Sherali [13]). Este método procede del método del gradiente reducido desarrollado por Wolfe [171] para la resolución de problemas no lineales con restricciones de igualdad lineales, que posteriormente fue extendido por Abadie y Carpentier [1] para implementar restricciones no lineales y que se consolidó finalmente tras el trabajo de Gabriele y Ragsdell [83].

Es un método similar al método del gradiente proyectado de Rosen [139], método recomendado por Liu y Der Kiureghian [110] para su empleo en problemas de fiabilidad. Trata de buscar una dirección de búsqueda tal, que las restricciones activas permanezcan así para un movimiento pequeño en esa dirección. Si debido a la no linealidad, alguna de las restricciones pasa a ser inactiva, se utiliza un método de Newton para regresar al contorno restringido.

Considérese el siguiente problema de programación matemática no lineal:

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & f(\mathbf{x}) \\ & \mathbf{x} \end{array} \quad (4.64)$$

sometido a

$$g_j(\mathbf{x}) + x_{j+n} = 0; \quad j = 1, \dots, m \quad (4.65)$$

$$h_k(\mathbf{x}) = 0; \quad k = 1, \dots, \ell \quad (4.66)$$

$$x_i^{\text{lo}} \leq x_i \leq x_i^{\text{up}}; \quad i = 1, \dots, n \quad (4.67)$$

$$x_{j+n} \geq 0; \quad j = 1, \dots, m \quad (4.68)$$

en el que las restricciones (4.65) representan las desigualdades no lineales, transformadas a igualdades mediante variables de holgura positivas (restricción (4.68)). Las restricciones (4.66) son las de igualdad, y (4.67) son los límites de las variables. El número total de variables de diseño será de $n + m$.

La idea básica del método es tratar de identificar las variables dependientes asociadas a las restricciones de igualdad, con lo cual se puede reducir el número de variables independientes. De esta manera se puede generar un problema de optimización no restringida sujeto sólo a los límites de las variables dependientes e independientes. A las variables independientes se las conoce como variables de decisión o superbásicas, mientras que a las dependientes se las conoce como variables de estado o no básicas.

Considerando de nuevo el problema (4.64)-(4.68), sólo con restricciones de igualdad. El vector \mathbf{x} , que contiene a las variables iniciales (n) más las de holgura (m) se divide en dos:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \mathbf{z} \\ \mathbf{y} \end{pmatrix}; \quad \begin{array}{l} n - \ell \text{ variables independientes} \\ m + \ell \text{ variables dependientes} \end{array} \quad (4.69)$$

De momento no se discute el criterio para dividir las variables, y puesto que ahora todas las restricciones son de igualdad se va a agrupar (4.65) y (4.66) en una única restricción,

$$h_k(\mathbf{x}) = 0; \quad k = 1, \dots, m + \ell \quad (4.70)$$

y lo mismo con las variables (4.67) y (4.68) para obtener

$$x_i^{\text{lo}} \leq x_i \leq x_i^{\text{up}}; \quad i = 1, \dots, n + m \quad (4.71)$$

donde los límites superiores de las variables de holgura serán valores muy grandes (tienden a infinito).

El problema de optimización (4.64) y (4.68) queda:

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{z}, \mathbf{y}) \\ & \mathbf{z}, \mathbf{y} \end{array} \quad (4.72)$$

sometido a

$$h_k(\mathbf{x}) = 0; \quad k = 1, \dots, m + \ell \quad (4.73)$$

$$x_i^{\text{lo}} \leq x_i \leq x_i^{\text{up}}; \quad i = 1, \dots, n + m \quad (4.74)$$

Diferenciando la función objetivo (4.72) y las restricciones (4.73) resulta

$$df(\mathbf{x}) = \nabla_{\mathbf{z}}^T f(\mathbf{x}) d\mathbf{z} + \nabla_{\mathbf{y}}^T f(\mathbf{x}) d\mathbf{y} \quad (4.75)$$

$$dh_k(\mathbf{x}) = \nabla_{\mathbf{z}}^T h_k(\mathbf{x}) d\mathbf{z} + \nabla_{\mathbf{y}}^T h_k(\mathbf{x}) d\mathbf{y}; \quad k = 1, \dots, m + \ell \quad (4.76)$$

donde $\nabla_{\mathbf{z}}$ y $\nabla_{\mathbf{y}}$ son los gradientes con respecto a las variables independientes y dependientes, respectivamente.

Suponiendo que inicialmente se cumplen las restricciones de igualdad, para cualquier cambio en las variables superbásicas, éstas han de seguir activas para que se cumpla la factibilidad. Esto implica que $dh_k(\mathbf{x}) = 0$; $k = 1, \dots, m + \ell$. La ecuación (4.76) puede escribirse en forma matricial como

$$d\mathbf{h}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \nabla_{\mathbf{z}}^T h_1(\mathbf{x}) \\ \nabla_{\mathbf{z}}^T h_2(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ \nabla_{\mathbf{z}}^T h_{m+\ell}(\mathbf{x}) \end{pmatrix} d\mathbf{z} + \begin{pmatrix} \nabla_{\mathbf{y}}^T h_1(\mathbf{x}) \\ \nabla_{\mathbf{y}}^T h_2(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ \nabla_{\mathbf{y}}^T h_{m+\ell}(\mathbf{x}) \end{pmatrix} d\mathbf{y} = \mathbf{A}d\mathbf{z} + \mathbf{B}d\mathbf{y} = 0 \quad (4.77)$$

Ahora para cualquier cambio en las variables independientes \mathbf{z} , como ha de cumplirse la condición (4.77), se pueden calcular los valores de las variables \mathbf{y} para mantener la factibilidad de las restricciones,

$$d\mathbf{y} = -\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}d\mathbf{z} \quad (4.78)$$

Sustituyendo la ecuación (4.78) en la ecuación (4.75), se tiene:

$$\begin{aligned} df(\mathbf{x}) &= \nabla_{\mathbf{z}}^T f(\mathbf{x})d\mathbf{z} - \nabla_{\mathbf{y}}^T f(\mathbf{x}) [\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}] d\mathbf{z} \\ &= \{ \nabla_{\mathbf{z}}^T f(\mathbf{x}) - \nabla_{\mathbf{y}}^T f(\mathbf{x}) [\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}] \} d\mathbf{z} \end{aligned} \quad (4.79)$$

de donde

$$\mathbf{G}_R = \frac{df(\mathbf{x})}{d\mathbf{z}} = \nabla_{\mathbf{z}} f(\mathbf{x}) - [\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}]^T \nabla_{\mathbf{y}} f(\mathbf{x}) \quad (4.80)$$

donde \mathbf{G}_R es el ‘gradiente reducido generalizado’. Éste puede ser utilizado para obtener una dirección nueva de búsqueda para las variables superbásicas:

$$\mathbf{z}^q = \mathbf{z}^{q-1} + \alpha \mathbf{G}_R; \quad d\mathbf{z} = \alpha \mathbf{G}_R \quad (4.81)$$

El problema es que para cada valor α las variables dependientes \mathbf{y} han de ser actualizadas mediante la ecuación (4.78), que es una aproximación lineal, con lo que es posible que con el nuevo valor de \mathbf{y} no se cumpla (4.77). Por tanto se debe encontrar un nuevo $d\mathbf{y}$ que cumpla la condición

$$h_k(\mathbf{x}) + dh_k(\mathbf{x}) = 0; \quad k = 1, \dots, m + \ell \quad (4.82)$$

donde $\mathbf{x} = (\mathbf{z} + d\mathbf{z}, \mathbf{y} + d\mathbf{y})^T$.

Es decir, se ha calcular el $d\mathbf{y}$ tal que

$$dh_k(\mathbf{x}) = -h_k(\mathbf{x}); \quad k = 1, \dots, m + \ell \quad (4.83)$$

Sustituyendo la ecuación (4.83) en la expresión (4.77) y despejando el $d\mathbf{y}$ se obtiene

$$d\mathbf{y} = \mathbf{B}^{-1} \{ \mathbf{h}(\mathbf{x}) - \mathbf{A}d\mathbf{z} \} \quad (4.84)$$

Por tanto las variables dependientes son actualizadas añadiendo $d\mathbf{y}$ a los valores previos, y es preciso evaluar de nuevo las restricciones. Hasta que todas las restricciones cumplan $h_k(\mathbf{x}) \leq \epsilon$; $k = 1, \dots, m + \ell$, donde ϵ es una tolerancia especificada. Nótese que este procedimiento no es más que el método de Newton para resolver sistemas no lineales, sin embargo se supone que la información del gradiente en \mathbf{A} y \mathbf{B} es constante, es decir que no se actualiza, con lo cual el método es similar a una iteración simple de punto fijo. Así, sin considerar como se separan las variables, y suponiendo calculadas las variables de holgura iniciales, el algoritmo queda de la siguiente manera:

Algoritmo 4.2 (Método del gradiente reducido generalizado).

- **Entrada:** Función objetivo (4.64), restricciones (4.65)-(4.68), valor inicial de las variables $\mathbf{x}^{(0)}$ en la región factible y del parámetro α . Iniciar $i = 0$.
- **Salida:** Valor de las variables \mathbf{x}^* óptimo que satisface las condiciones de Karush-Kuhn-Tucker (definición 3.1).

Paso 1: Hacer $i = i + 1$ y calcular las matrices $\mathbf{A}^{(i-1)}$ y $\mathbf{B}^{(i-1)}$ mediante la fórmula (4.77) en el punto $\mathbf{x}^{(i-1)} = (\mathbf{z}^{(i-1)}, \mathbf{y}^{(i-1)})^T$.

Paso 2: Obtención de la dirección de búsqueda $\mathbf{G}_R^{(i-1)}$ mediante (4.80), si $\mathbf{G}_R^{(i-1)} = 0$ se ha localizado un punto de KKT, el procedimiento termina con la solución $\mathbf{x}^* = \mathbf{x}^{(i-1)}$ en caso contrario ir al paso siguiente.

Paso 3: Calcular el nuevo valor de las variables superbásicas $\mathbf{z}^{(i)} = \mathbf{z}^{(i-1)} + \alpha \mathbf{G}_R^{(i-1)}$

Paso 4: Actualización de las variables dependientes $\mathbf{y}^{(i)}$, con el procedimiento iterativo siguiente:

1. Iniciar $j = 0$.
2. Hacer $j = j + 1$, $\mathbf{x}^{(j-1)} = (\mathbf{z}^{(i)}, \mathbf{y}^{(i-1)})^T$.
3. Evaluación del nuevo incremento de las variables dependientes mediante la fórmula (4.84),

$$d\mathbf{y}^{(j)} = \mathbf{B}^{(i-1)^{-1}} \{ \mathbf{h}(\mathbf{x}^{(j-1)}) - \mathbf{A}^{(i-1)} d\mathbf{z} \}.$$
4. Establecer $\mathbf{y}^{(j)} = \mathbf{y}^{(j-1)} + d\mathbf{y}^{(j)}$ y $\mathbf{x}^{(j)} = (\mathbf{z}^{(i)}, \mathbf{y}^{(j)})^T$.
5. Evaluar $\mathbf{h}(\mathbf{x}^{(j)})$, si $h_k(\mathbf{x}^{(j)}) \leq \epsilon$; $\forall k = 1, \dots, m + \ell$ ir al **paso 1**, en caso contrario $j = j + 1$ e ir a 2.

■

Uno de los condicionantes importantes para el correcto funcionamiento del método es la división de las variables en dependientes e independientes, dado que la matriz asociada a las variables dependientes \mathbf{y} (\mathbf{B}), ha de ser no singular para poder calcular su inversa. Y además hay que procurar que las variables dependientes seleccionadas estén lejos de sus límites. Por tanto, se tiene que efectuar un preproceso para cumplir estos requerimientos. Para ello se va a partir de la matriz de gradientes,

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \nabla_{\mathbf{x}}^T h_1(\mathbf{x}) \\ \nabla_{\mathbf{x}}^T h_2(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ \nabla_{\mathbf{x}}^T h_{m+\ell}(\mathbf{x}) \end{pmatrix}_{(m+\ell) \times (n+m)} \quad (4.85)$$

como hay más columnas que filas, se quiere extraer una submatriz no singular que corresponderá a la matriz \mathbf{B} , para ello se usa una eliminación de Gauss con pivoteo partiendo de la ecuación

$$\mathbf{Q}\mathbf{X} = \mathbf{I} \quad (4.86)$$

donde \mathbf{I} es la matriz identidad. Si se efectúa el pivoteo, y se busca el máximo pivote parcial en cada fila, la columna seleccionada será la correspondiente a la variable dependiente seleccionada. Normalizando y pivotando con las filas inferiores tanto en la matriz \mathbf{Q} como en la \mathbf{I} , al final del proceso la transformada de la matriz identidad será \mathbf{B}^{-1} , y las columnas restantes de \mathbf{Q} contendrán $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}$. Nótese que desde el punto de vista computacional, se puede almacenar la transformada de la identidad en las columnas que contienen al pivote.

Para evitar el tomar como variables dependientes las que están cerca de sus límites inferior o superior, se prescinde de utilizar éstas como columnas pivote. Aún así, esto no nos libra de que en función del valor de α seleccionado, las variables dependientes actualizadas sean infactibles. Habrá que controlar ese parámetro. Las últimas versiones de este método, utilizan una secuencia discreta de tamaños de paso, calculan en nuevo punto \mathbf{x} y el valor de la función objetivo $f(\mathbf{x})$, y mediante interpolación cuadrática calculan el tamaño de paso que conduce al valor mínimo de la función objetivo. Esta técnica hace que el algoritmo sea más fiable y robusto.

Parte II

Aportaciones Originales

Capítulo 5

Aportaciones a los Métodos de Nivel III

5.1. Introducción

En este capítulo se presentan dos aportaciones originales para el cálculo de la probabilidad de fallo mediante métodos de integración numérica.

5.2. Integración de probabilidades extremas usando politopos

En esta subsección se introduce un nuevo método para calcular probabilidades de fallo p_f , es decir, la integral en (2.1), utilizando politopos. La metodología consta de las siguientes etapas:

Etapas 1: Transformación de las variables al hipercubo unitario. El conjunto inicial de variables se transforma en un conjunto de variables uniformes independientes $U(0, 1)$.

Etapas 2: Se fuerza al origen de coordenadas a pertenecer a la región de fallo. Esto permite ordenar la seguridad de los puntos de diseño contenidos en rayos que parten del origen según su distancia a éste. Cuanto más alejados del origen, más seguros serán.

Etapas 3: División de la región de fallo en una serie de politopos. Cubriendo la región de fallo por un conjunto de politopos con un vértice común (el origen), y los demás vértices situados en el contorno de la región de fallo, podemos aproximar la probabilidad de fallo como la suma de los volúmenes de todos los politopos generados.

Etapas 4: División de cada politopo en símlices. En un espacio n -dimensional, los símlices son politopos con $n + 1$ vértices. La ventaja de este paso es que no existen fórmulas generales para el cálculo del volumen de un politopo, pero sí para el caso de los símlices.

Etapa 5: Evaluación de la integral. Se evalúa la integral como suma de los volúmenes de los símlices.

En las subsecciones siguientes se describen los pasos en detalle.

5.2.1. Transformación de las variables al hipercubo unitario.

En este apartado se utiliza la transformación de Rosenblatt [140] para obtener las variables uniformes $U(0, 1)$:

$$\begin{aligned} U_1 &= F_1(X_1) \\ U_2 &= F_2(X_2|X_1) \\ &\vdots \\ U_n &= F_n(X_n|X_1, X_2, \dots, X_{n-1}), \end{aligned} \quad (5.1)$$

donde $F_1(X_1)$, $F_2(X_2|X_1)$, \dots , $F_n(X_n|X_1, X_2, \dots, X_{n-1})$ son las funciones de distribución marginales de X_1 y las condicionadas de las variables indicadas respectivamente.

La inversa de esta transformación es

$$\begin{aligned} X_1 &= F_1^{-1}(U_1) = h_1(U_1) \\ X_2 &= F_2^{-1}(U_2|F_1^{-1}(U_1)) = h_2(U_1, U_2) \\ &\vdots \\ X_n &= F_n^{-1}(U_n|F_1^{-1}(U_1), \dots, F_{n-1}^{-1}(U_{n-1}, \dots)) = h_n(U_1, U_2, \dots, U_n) \end{aligned} \quad (5.2)$$

Con esta transformación se obtiene un conjunto de variables uniformes independientes, y la integral (2.1) se transforma en el cálculo del hipervolumen

$$p_f = \int_{g_{\mathbf{U}}(u_1, u_2, \dots, u_n) \leq 0} du_1 du_2 \dots du_n \quad (5.3)$$

de la región de fallo transformada

$$g_{\mathbf{U}}(u_1, u_2, \dots, u_n) = g_{\mathbf{X}}(h_1(u_1), h_2(u_1, u_2), \dots, h_n(u_1, u_2, \dots, u_n)) \leq 0. \quad (5.4)$$

Además, permite trabajar con un conjunto de variables adimensionales, es decir, variables aleatorias cuyos valores no dependen de las unidades de medida seleccionadas.

5.2.2. Posicionamiento del origen de coordenadas en la región de fallo.

Sin pérdida de generalidad, se puede asumir que todas las variables aleatorias que intervienen son relevantes, es decir, tales que cualquier cambio en su valor, afecta a la seguridad del sistema en estudio. De otra forma, se podrían eliminar las variables que no tuvieran influencia y disminuir así la dimensión del problema. Esto implica que para cada variable transformada, el peor valor posible es o bien 0 o bien 1. Así, las variables U_k cuyo valor pésimo para la fiabilidad del sistema sea 1, se transformarán a $V_k = 1 - U_k$, así las nuevas variables tendrán sus valores pésimos en el origen de coordenadas. Y consecuentemente, el origen pertenecerá a la región de fallo.

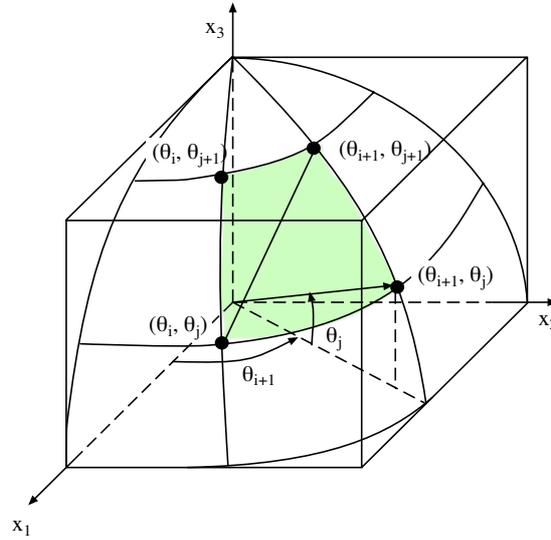


Figura 5.1: Ilustración gráfica de cómo se genera la malla inicial n -dimensional sobre la hipersfera unitaria, de tal forma que se puedan construir los radiovectores que emanen del origen y pasen por los nodos de la malla.

5.2.3. División de la región de fallo en una serie de politopos.

La idea de esta etapa es la siguiente. Considérese inicialmente la esfera unitaria (centrada en el origen) dentro del hipercubo (véase la figura 5.1). Utilizando coordenadas esféricas, $(\rho, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{n-1})$, donde ρ es la longitud del radiovector que parte del origen, y $\theta_i; i = 1, 2, \dots, n-1$ son las coordenadas esféricas restantes, un punto sobre la superficie de la esfera n -dimensional tendrá como coordenadas $(1, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{n-1})$. Las coordenadas cartesianas correspondientes (x_1, x_2, \dots, x_n) son

$$\begin{aligned} x_1 &= \prod_{i=1}^{n-1} \cos \theta_i \\ x_j &= \sin \theta_{j-1} \prod_{i=j}^{n-1} \cos \theta_i; \quad j = 2, \dots, n-1 \\ x_n &= \sin \theta_{n-1} \end{aligned} \quad (5.5)$$

La malla inicial sobre la superficie de la hipersfera se construye dividiendo cada coordenada angular esférica $\theta_i = \pi/2; i = 1, 2, \dots, n-1$ en m partes, generando una malla esférica, definida por un conjunto de nodos (en coordenadas esféricas) (véase la figura 5.1):

$$\{(1, k_{1j}\pi/(2m), k_{2j}\pi/(2m), \dots, k_{(n-1)j}\pi/(2m)) | k_{ij} = 0, 1, \dots, m; i = 1, 2, \dots, n-1\}. \quad (5.6)$$

El siguiente paso es utilizar un método de localización de raíces para calcular las intersecciones de los rayos que unen el origen con los nodos de la malla con la región de fallo (véase la figura 5.2). En este caso se ha seleccionado la bisección, un método de intervalo cerrado, que se puede usar porque se conoce el dominio de variación de las variables (interior

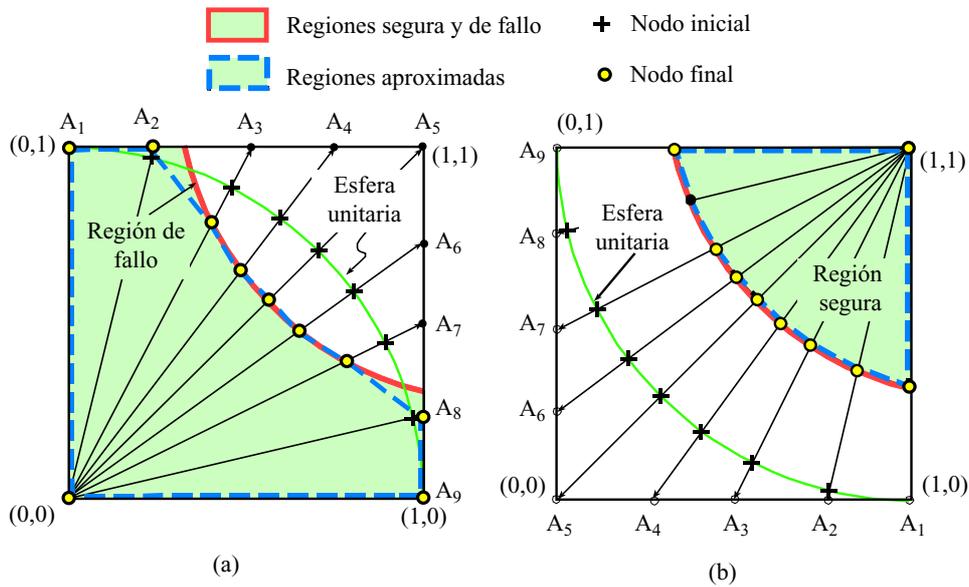


Figura 5.2: Ilustración gráfica de cómo se construye la nueva malla partiendo de los nodos iniciales en la hipersfera, la intersección de los radiovectores OA_i con la región de fallo constituyen los nuevos nodos. Caso bidimensional.

del hipercubo). Podrían utilizarse otras metodologías como el método de la falsa posición, e incluso métodos abiertos como la iteración simple de punto fijo o el método de la secante (éste es uno de los aspectos a mejorar en este método, ya que acelerarían la convergencia). En este paso pueden ocurrir dos cosas:

1. El radiovector intersecta el contorno de la región de fallo (véanse los radiovectores OA_3 , OA_4 , OA_5 , OA_6 , y OA_7 de la figura 5.2(a)). En este caso, el punto de intersección se usa para construir la nueva malla.
2. El radiovector no intersecta el contorno de la región de fallo (véanse los radiovectores OA_1 , OA_2 , OA_8 , y OA_9 de la figura 5.2). En este caso, la intersección del radiovector con el contorno del hipercubo se utiliza como nuevo nodo de la malla definitiva.

Nótese que si el radiovector es (z_1, z_2, \dots, z_n) , su intersección con el contorno del hipercubo unitario es el vector

$$\frac{(z_1, z_2, \dots, z_n)}{\max\{z_1, z_2, \dots, z_n\}}.$$

Este último vector, junto con el origen pueden usarse como puntos extremos del método de la bisección. Así se calcula el punto de intersección del rayo con el contorno de la región de fallo. Si no existe punto de corte, se utiliza el vector extremo como punto de la nueva malla.

Los nodos resultantes serán los puntos de la malla sobre la región de fallo (véanse las figuras 5.2(a) y 5.3, figura derecha).

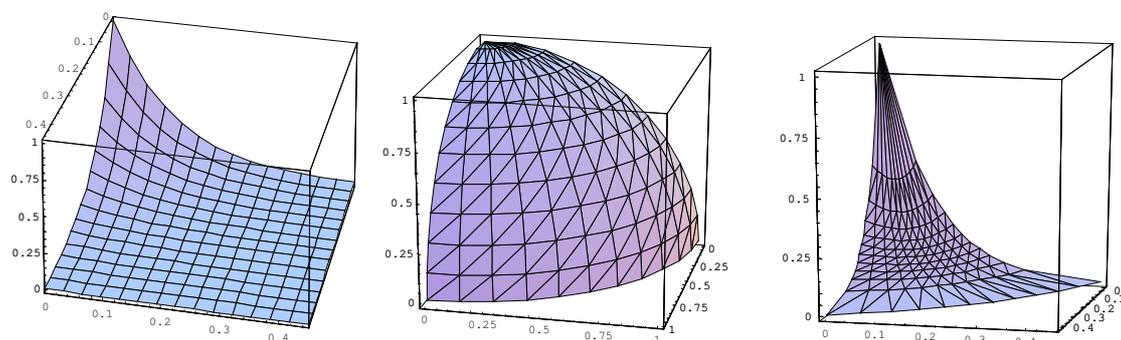


Figura 5.3: Ilustración gráfica de cómo la región de fallo (dibujo de la izquierda) se divide en un conjunto de politopos utilizando la malla sobre el contorno de la región de fallo (dibujo de la derecha), que se obtiene mediante la intersección de los radiovectores que parten del origen y que pasan por los nodos de la malla esférica (dibujo central).

Alternativamente, se podría evaluar la probabilidad de que no falle la estructura, la probabilidad de fallo p_f se obtendrá como complemento a uno del resultado obtenido. Los radiovectores considerados partirán del punto $(1, 1, \dots, 1)$ en lugar del origen y se utilizará la misma metodología, como se ilustra en la figura 5.2(b).

Comentario 5.1 *Nótese que un radiovector puede intersectar la región de fallo como mucho en un punto. De lo contrario, supondría que existen dos puntos con el mismo nivel de seguridad, y que uno puede obtenerse a partir del otro sin más que reducir todas sus componentes, es decir, contradiciendo las hipótesis de la sección 5.2.2.* ■

5.2.4. División de cada politopo en símplexes.

Dado que el volumen de un politopo es difícil de calcular, conviene dividirlo en símplexes. Para ello, debe uno darse cuenta de que la malla n -dimensional generada divide la superficie de la esfera en hipercubos de dimensión $n - 1$. Por ejemplo, en tres dimensiones, la superficie de la esfera es dividida en cuadrados (hipercubos de dimensión 2, como se muestra en la figura 5.3). Se necesita por tanto una metodología para particionar hipercubos en símplexes de cualquier dimensión. El hipercubo unitario puede descomponerse utilizando el algoritmo que se ilustra en la tabla superior para un caso 4-dimensional.

Inicialmente, se comienza con el origen en la primera columna (véase la tabla 5.2.4). En la segunda columna se incluyen todos los vectores que pueden generarse reemplazando una sola vez por vector generado, un cero por un uno en todas las posiciones posibles. Las columnas siguientes se generan de forma similar, obteniendo todos los vectores que se pueden generar con uno dado, sin más que modificar alguno de sus ceros por un uno. Finalmente, combinando el origen con todas las posibles combinaciones de las columnas siguientes, se obtienen todos los símplexes. En el ejemplo tridimensional previo, los símplexes que dividen el cubo son los que se muestran en la figura 5.4.

	(1, 0, 0)	(1, 1, 0)	(1, 1, 1)	<p>Lista de símlices</p> $\{(0,0,0), (1,0,0), (1,1,0), (1,1,1)\}$ $\{(0,0,0), (1,0,0), (1,0,1), (1,1,1)\}$ $\{(0,0,0), (0,1,0), (1,1,0), (1,1,1)\}$ $\{(0,0,0), (0,1,0), (0,1,1), (1,1,1)\}$ $\{(0,0,0), (0,0,1), (1,0,1), (1,1,1)\}$ $\{(0,0,0), (0,0,1), (0,1,1), (1,1,1)\}$
		(1, 0, 1)	(1, 1, 1)	
(0, 0, 0)	(0, 1, 0)	(1, 1, 0)	(1, 1, 1)	
		(0, 1, 1)	(1, 1, 1)	
	(0, 0, 1)	(1, 0, 1)	(1, 1, 1)	
		(0, 1, 1)	(1, 1, 1)	

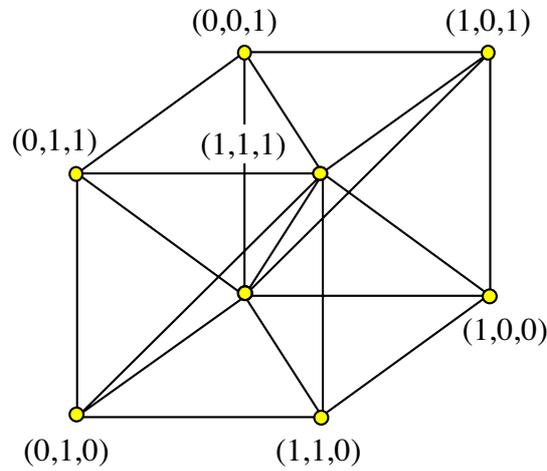


Figura 5.4: Ilustración de cómo el hipercubo unitario n -dimensional se divide en $n!$ símlices (en este ejemplo tridimensional, 6 símlices).

Obsérvese que todos los símlices contienen el origen $(0, 0, 0)$ y el nodo $(1, 1, 1)$.

5.2.5. Evaluación de la integral.

La integral global se calcula como suma de los volúmenes de todos los símlices Vol_1 , y se refina aún más añadiendo el término Vol_2 :

$$\text{Vol}_1 = \frac{1}{n!} \begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} & 1 \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nn} & 1 \end{vmatrix}; \quad \text{Vol}_2 = \frac{1}{n!} \begin{vmatrix} x_{01} & x_{02} & \dots & x_{0n} & 1 \\ x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} & 1 \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nn} & 1 \end{vmatrix} \quad (5.7)$$

donde $(x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{in})$; $i = 1, 2, \dots, n$ son los vértices correspondientes de los símlices, y $(x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0n})$ es la intersección del radio vector que pasa por el centro de gravedad del hipercubo considerado. El volumen Vol_2 deberá sumarse o restarse en función de la curvatura de la región de fallo en el punto $(x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0n})$.

Algoritmo 5.1 (Cálculo de la probabilidad de fallo). El método propuesto puede aplicarse utilizando el siguiente algoritmo.

- **Entrada:** Conjunto inicial de variables $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$, su función de densidad conjunta $f_{X_1, X_2, \dots, X_n}(x_1, x_2, \dots, x_n)$, y la región de fallo $g_{\mathbf{X}}(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq 0$.
- **Salida:** La probabilidad de fallo asociada a la región de fallo dada.

Paso 1: Transformación del conjunto inicial de variables \mathbf{X} en un conjunto de variables aleatorias \mathbf{U} independientes con distribución uniforme $U(0, 1)$ mediante la transformación de Rosenblatt, y la región de fallo $g_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$ a la nueva región de fallo $g_{\mathbf{U}}(\mathbf{u})$.

Paso 2: Transformación del conjunto de variables \mathbf{U} en un nuevo conjunto \mathbf{V} , de forma que el vector $(0, 0, \dots, 0)$ sea el más desfavorable desde el punto de vista de la seguridad. Para ello, cámbiese U_i por $V_i = U_i$ ó $V_i = 1 - U_i$ según corresponda.

Paso 3: Generación de una malla esférica y los politopos iniciales utilizando las fórmulas (5.5) y (5.6).

Paso 4: División del politopo en símlices utilizando el algoritmo descrito en la página 113.

Paso 5: Construcción de la malla sobre la región de fallo utilizando el método de la bisección (u otro alternativo).

Paso 6: Cálculo de la probabilidad de fallo sumando los volúmenes de todos los símlices. Éstos se determinarán con la fórmula del determinante (5.7).

■

5.2.6. Aplicación del método de los politopos

En esta sección se analiza la aplicación del método propuesto en la sección 5.2 con su aplicación a tres ejemplos, de los que se conocen los valores exactos de sus probabilidades de fallo.

Ejemplo computacional 5.1 (Suma de variables uniformes independientes). Para comprobar el comportamiento del método se asume, en el primer ejemplo, que la región de fallo es

$$Z = \sum_{i=1}^n X_i \leq k$$

donde $X_i; i = 1, 2, \dots, n$ son n variables aleatorias uniformes independientes igualmente distribuidas $U(0, 1)$. El resultado exacto de la función de distribución asociada a la región de fallo es:

$$F(x) = \frac{1}{n!} \sum_{r=0}^{\lfloor x \rfloor} (-1)^r \binom{n}{r} (x-r)^n; \quad 0 < x < n, \quad (5.8)$$

donde $\lfloor x \rfloor$ es la parte entera de x .

Utilizando el método propuesto se ha obtenido que independientemente del valor de n y tomando el mínimo número de subdivisiones ($m = 1$) los resultados son exactos. Ya que la región elegida es lineal (hiperplano) y la malla que se ajusta se adapta perfectamente a la región de fallo. La tabla 5.1 muestra los valores obtenidos para los distintos casos, con distintas subdivisiones y comparando los resultados con el valor exacto y el obtenido mediante la simulación de Monte Carlo. ■

Ejemplo computacional 5.2 (Suma de variables normales independientes). En este ejemplo se asume que

$$Z = \sum_{i=1}^n X_i \leq k$$

donde $X_i; i = 1, 2, \dots, n$ son n variables aleatorias normales, independientes e igualmente distribuidas $N(0, 1)$. Esto nos permite comprobar el resultado ya que $Z \sim N(0, 1/\sqrt{n})$, y por tanto, la probabilidad de fallo exacta es p_f :

$$p_f = \Phi\left(\frac{k}{\sqrt{n}}\right), \quad (5.9)$$

donde $\Phi(\cdot)$ es la función de distribución de la variable normal $N(0, 1)$.

La tabla 5.2 muestra el grado de aproximación del método para distintos valores de n y m , junto con una comparación con el método de Monte Carlo. En este ejemplo se han seleccionado probabilidades grandes (cola derecha de la distribución). ■

Ejemplo ilustrativo 5.1 (Cociente de la suma de variables exponenciales independientes). Sean X_1, X_2 y X_3 tres variables aleatorias independientes e igualmente distribuidas según una distribución exponencial $E(\lambda)$.

Cuadro 5.1: Ilustración de la calidad de la aproximación en función del número de subdivisiones m y del número de variables n para la suma de variables uniformes independientes, junto con una comparación con el método Monte Carlo.

Método propuesto			Simulación de Monte Carlo			
n	m	Probabilidad aproximada	tiempo de cpu (en ticks)	Número de puntos	Probabilidad aproximada	tiempo de cpu (in ticks)
$k = 0,02$			$k = 4$			
2	2	0.000200	0	10^2	0.000000	0
2	5	0.000200	0	10^3	0.000000	0
2	10	0.000200	0	10^4	0.000400	0
2	20	0.000200	0	10^5	0.000180	2
2	30	0.000200	0	10^6	0.000190	22
2	40	0.000200	0	10^7	0.000205	219
2	50	0.000200	0	10^8	0.000198	2196
2	∞	0.000200	∞	∞	0.0.000200	∞
$k = 0,30$			$k = 5$			
3	2	0.004500	0	10^2	0.000000	0
3	5	0.004500	1	10^3	0.005000	0
3	10	0.004500	2	10^4	0.006700	1
3	20	0.004500	8	10^5	0.004210	3
3	30	0.004500	17	10^6	0.004493	31
3	40	0.004500	29	10^7	0.004516	315
3	50	0.004500	45	10^8	0.004495	3160
3	∞	0.004500	∞	∞	0.0.004500	∞
$k = 0,5$			$k = 6$			
4	2	0.000337	0	10^2	0.000000	0
4	5	0.000337	1	10^3	0.001000	0
4	10	0.000337	14	10^4	0.000400	1
4	20	0.000337	109	10^5	0.000290	4
4	30	0.000337	369	10^6	0.000300	41
4	40	0.000337	872	10^7	0.000331	414
4	50	0.000337	1706	10^8	0.000338	4131
4	∞	0.000337	∞	∞	0.0.000337	∞

Cuadro 5.2: Ilustración de la calidad de la aproximación en función del número de subdivisiones m y del número de variables n para la suma de variables normales independientes, junto con una comparación con el método Monte Carlo.

Método propuesto			Simulación de Monte Carlo			
n	m	Probabilidad aproximada	tiempo de cpu (en ticks)	Número de puntos	Probabilidad Aproximada	tiempo de cpu (en ticks)
$k = 4$			$k = 4$			
2	2	0.977285	0	10^2	1.000000	0
2	5	0.962304	0	10^3	0.998000	0
2	10	0.993608	0	10^4	0.998200	1
2	20	0.996127	0	10^5	0.997440	10
2	30	0.996875	0	10^6	0.997760	106
2	40	0.997188	1	10^7	0.997640	1051
2	50	0.997346	0	10^8	0.997661	10510
2	∞	0.997433	∞	∞	0.997433	∞
$k = 5$			$k = 5$			
3	2	0.853527	0	10^2	1.000000	0
3	5	0.910823	0	10^3	1.000000	0
3	10	0.983336	1	10^4	0.998200	1
3	20	0.993683	4	10^5	0.998100	16
3	30	0.995943	7	10^6	0.998040	155
3	40	0.996807	14	10^7	0.998042	1549
3	50	0.997227	22	10^8	0.998054	15494
3	∞	0.997822	∞	∞	0.997822	∞
$k = 6$			$k = 6$			
4	2	0.609655	0	10^2	1.000000	0
4	5	0.856433	3	10^3	0.999000	0
4	10	0.963625	23	10^4	0.998800	2
4	20	0.988194	185	10^5	0.998730	21
4	30	0.993714	623	10^6	0.998631	205
4	40	0.995799	1469	10^7	0.998644	2055
4	50	0.996777	2867	10^8	0.998721	20540
4	∞	0.998421	∞	∞	0.998421	∞

Considérese la variable aleatoria

$$Z = \frac{X_1 + X_2}{X_1 + X_2 + X_3}, \quad (5.10)$$

que tiene una función de distribución

$$F_Z(z) = z^2; \quad 0 \leq z \leq 1.$$

Por tanto, suponiendo que la región de fallo es $(x_1 + x_2)/(x_1 + x_2 + x_3) - k \leq 0$, la probabilidad de fallo exacta será k^2 .

El siguiente paso será determinar la probabilidad de fallo utilizando el método propuesto en el algoritmo 5.1. Así pues, se procede de la forma siguiente:

Paso 1: Se usa la transformación de Rosenblatt para obtener un conjunto de variables U uniformes independientes $U(0, 1)$. Para ello:

$$\begin{aligned} U_1 &= F_{X_1}(X_1) = 1 - \exp(-\lambda X_1), \\ U_2 &= F_{X_2}(X_2) = 1 - \exp(-\lambda X_2), \\ U_3 &= F_{X_3}(X_3) = 1 - \exp(-\lambda X_3). \end{aligned} \quad (5.11)$$

La región de fallo transformada, en función de las variables U , resulta

$$g_U(U_1, U_2, U_3) = \frac{\log((1 - U_1)(1 - U_2))}{\log((1 - U_1)(1 - U_2)(1 - U_3))} - k \leq 0 \quad (5.12)$$

Paso 2: Se transforman las variables U de forma que el vector $(0, 0, \dots, 0)$ sea el vector más desfavorable posible, para ello se utiliza la transformación

$$\begin{aligned} V_1 &= U_1 \\ V_2 &= U_2 \\ V_3 &= 1 - U_3 \end{aligned} \quad (5.13)$$

Paso 3: Dado que las nuevas variables V son variables uniformes idénticamente distribuidas $U(0, 1)$, se tiene que

$$f_{V_1, V_2, \dots, V_n}(v_1, v_2, \dots, v_n) = 1; \quad 0 \leq v_i \leq 1; \quad i = 1, 2, 3,$$

y la región de fallo resulta

$$g_V(v_1, v_2, v_3) = \frac{\log((1 - v_1)(1 - v_2))}{\log((1 - v_1)(1 - v_2)v_3)} - k \leq 0 \quad (5.14)$$

Step 4: Se calcula la probabilidad de fallo.

La tabla 5.3 muestra los resultados para distintos valores de m y k . ■

De los resultados obtenidos se puede concluir lo siguiente:

Cuadro 5.3: Ilustración de la calidad de la aproximación en función del número de subdivisiones m y del número de variables n para el cociente de la suma de variables exponenciales independientes, junto con una comparación con el método Monte Carlo.

Método propuesto				Simulación de Monte Carlo		
k	m	Probabilidad aproximada	tiempo de cpu (en ticks)	Número de puntos	Probabilidad Aproximada	tiempo de cpu (en ticks)
0.100	3	0.009947	0	10^4	0.011900	1
	10	0.009354	1	10^5	0.009790	7
	100	0.009807	100	10^6	0.009990	71
	200	0.009883	398	10^7	0.010026	705
	300	0.009925	894	10^8	0.009993	7050
	∞		0.010000	∞	∞	0.010000
0.010	3	0.000149	0	10^4	0.000100	1
	10	0.000116	1	10^5	0.000130	7
	50	0.000102	24	10^6	0.000098	71
	100	0.000100	97	10^7	0.000101	705
	∞		0.000100	∞	0.000100	∞
0.005	3	0.000042	0	10^4	0.000000	1
	10	0.000032	1	10^5	0.000050	7
	50	0.000026	24	10^6	0.000031	705
	100	0.000026	96	10^7	0.000027	7050
	∞		0.000025	∞	0.000025	∞

1. En el caso de suma de variables uniformes se obtiene un resultado exacto independientemente del número de subdivisiones, ya que la región de fallo es un hiperplano. Es decir, que es exacto para ecuaciones de estado límite lineales.
2. El tiempo de cpu utilizado en los cálculos aumenta de forma exponencial con el número de variables que intervienen.
3. El método se comporta de forma similar a los métodos de integración directa ya existentes, y tiene sus mismas limitaciones.

5.3. Método de Gauss Legendre

En esta subsección se introduce un nuevo método para calcular probabilidades de fallo p_f , es decir, la integral en (2.1), mediante las fórmulas de cuadratura de Gauss-Legendre (véase Castillo, Fernández-Canteli y Mínguez [30]). La metodología consta de las siguientes etapas:

Etapas 1: Transformación de las variables al hipercubo unitario. El conjunto inicial de variables se transforma en un conjunto de variables uniformes independientes $U(0, 1)$.

Etapas 2: Se fuerza al origen de coordenadas a pertenecer a la región de fallo.

Así se permite ordenar la seguridad de los puntos de diseño contenidos en rayos que parten del origen según su distancia a éste. Cuanto más alejados del origen, más seguros serán.

Etapas 3: Caracterización de los contornos de la región de fallo. Etapa que permite la evaluación posterior de la integral.

Etapas 4: Evaluación de la integral. Utilización de las fórmulas de cuadratura de Gauss-Legendre para integrar la región de fallo definida por su contorno mediante un procedimiento recursivo.

En las secciones siguientes se describen en detalle cada uno de los pasos.

5.3.1. Transformación de las variables al hipercubo unitario.

En este apartado se describen dos metodologías para obtener unas nuevas variables tales que sus distribuciones marginales sean uniformes $U(0, 1)$. La primera de ellas tiene la ventaja de que las nuevas variables son independientes.

1. *Transformación de Rosenblatt* [140] La misma que la estudiada en la sección 5.2 transforma un conjunto n -dimensional de variables aleatorias, en variables aleatorias uniformes independientes y adimensionales.
2. *Transformación marginal CDF* Una alternativa a Rosenblatt consiste en utilizar la siguiente transformación (véase la figura 5.5):

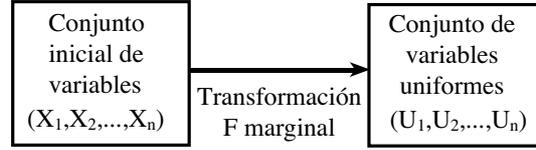


Figura 5.5: Ilustración de cómo se transforma el conjunto inicial de variables aleatorias en un conjunto de variables uniformemente distribuidas independientes.

$$U_i = F_{X_i}(X_i); \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (5.15)$$

Entonces, si $f_{X_1, X_2, \dots, X_n}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ es la función de densidad conjunta del conjunto inicial de variables X_1, X_2, \dots, X_n , la función de distribución del nuevo conjunto U_1, U_2, \dots, U_n será:

$$\begin{aligned} g_{U_1, U_2, \dots, U_n}(u_1, u_2, \dots, u_n) &= f_{X_1, X_2, \dots, X_n}(F_{X_1}^{-1}(u_1), F_{X_2}^{-1}(u_2), \dots, F_{X_n}^{-1}(u_n)) \\ &\times \prod_{i=1}^n \frac{1}{f_{X_i}(F_{X_i}^{-1}(u_i))}. \end{aligned} \quad (5.16)$$

5.3.2. Posicionamiento del origen de coordenadas en la región de fallo.

Al igual que en el método de la sección 5.2, se asumirá sin pérdida de generalidad, que todas las variables aleatorias que intervienen son relevantes, es decir, tales que cualquier cambio en su valor, afecta a la seguridad del sistema en estudio. De otra forma, se podrían eliminar las variables que no tuvieran influencia y disminuir así la dimensión del problema. Esto implica que para cada variable transformada, el peor valor posible es 0 ó 1. Así, las variables U_k cuyo valor pésimo para la fiabilidad del sistema sea 1, se transformarán a $V_k = 1 - U_k$, con lo que las nuevas variables tendrán sus valores pésimos en el origen de coordenadas, y consecuentemente, el origen pertenecerá a la región de fallo.

5.3.3. Caracterización del contorno de la región de fallo.

Dado que se tiene que calcular la probabilidad de fallo a través de una integral, se deben dejar perfectamente definidos los límites de integración. Quedando por tanto:

$$p_f = P(g(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq 0) = \int_{g(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq 0} f_{X_1, X_2, \dots, X_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_n dx_{n-1} \dots dx_1 \quad (5.17)$$

que puede escribirse como

$$p_f = \int_0^{b_1} \int_0^{b_2(x_1)} \int_0^{b_3(x_1, x_2)} \dots \int_0^{b_n(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})} f_{X_1, X_2, \dots, X_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_n dx_{n-1} \dots dx_1. \quad (5.18)$$

Por tanto, se requiere la obtención de los límites de integración

$$b_1, b_2(x_1), b_3(x_1, x_2), \dots, b_n(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}),$$

asociados a cada dimensión.

Para ello, se considera la función inversa g_i^{-1} de $g(x_1, x_2, \dots, x_n)$ con respecto a su argumento i -ésimo, que se define por la identidad

$$g(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \Leftrightarrow g_i^{-1}(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_n) = x_i. \quad (5.19)$$

Si $a_i; i = 1, 2, \dots, n$ son los límites inferiores (los valores mínimos posibles) de las variables aleatorias $X_i; i = 1, 2, \dots, n$, se puede escribir

$$b_k(x_1, x_2, \dots, x_{k-1}) = \min(g_k^{-1}(x_1, x_2, \dots, x_{k-1}, 0, a_{k+1}, a_{k+2}, \dots, a_n), a_k) \quad (5.20)$$

donde

$$b_1 = \min(g_1^{-1}(0, a_2, a_3, \dots, a_n), a_1). \quad (5.21)$$

Dado que las inversas, en general, no pueden obtenerse analíticamente, se requieren métodos numéricos. Como el problema está acotado en el hipercubo unitario (con límites 0 y 1) se puede emplear cualquiera de los métodos existentes de intervalo cerrado, bisección, falsa posición, etc. Por simplicidad se ha empleado el método de la bisección. Una de las mejoras inmediatas que puede tener el método es la utilización de otras metodologías de resolución de la inversa que funcionen mejor que la bisección. De hecho convendría probar alguno de intervalo abierto, que en el caso de converger lo hacen de forma mucho más rápida que la bisección.

5.3.4. Evaluación de la integral mediante la cuadratura de Gauss-Legendre

Esta variante emplea la fórmula de Gauss-Legendre

$$\int_a^b f(x) dx \simeq \frac{b-a}{2} \sum_{i=0}^m w_i f\left(\frac{z_i(b-a) + b+a}{2}\right), \quad (5.22)$$

donde w_i y z_i son los correspondientes pesos y puntos de Gauss, respectivamente (véase Carnahan, Luther y Wilkes [24]).

Para implementar esta fórmula unidimensional para la integral n -dimensional (5.18), se define I_k como

$$I_k = \text{Integral}(x_1, x_2, \dots, x_{k-1})$$

que es igual a

$$I_k = \int_0^{b_k(x_1, \dots, x_{k-1})} \dots \int_0^{b_n(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})} f_{X_1, X_2, \dots, X_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_n \dots dx_k \quad (5.23)$$

con

$$Integral(x_1, x_2, \dots, x_n) = f_{X_1, X_2, \dots, X_n}(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad (5.24)$$

que puede aproximarse por

$$I_k = Integral(x_1, x_2, \dots, x_{k-1}) \simeq \frac{b_k(x_1, x_2, \dots, x_{k-1})}{2} \times \sum_{i=0}^m w_i Integral \left(x_1, x_2, \dots, x_{k-1}, \frac{z_i b_k(x_1, x_2, \dots, x_{k-1}) + b_k(x_1, x_2, \dots, x_{k-1})}{2} \right), \quad (5.25)$$

lo que nos permite calcular $p_f = I_1$ mediante un procedimiento recursivo.

Se han usado dos versiones:

Versión normal: El grado q del polinomio de Gauss utilizado es independiente del rango de integración en cada dimensión, e igual a m .

Versión optimizada: Para mejorar la aproximación, el grado del polinomio de Gauss utilizado es función de la longitud b del intervalo unidimensional en el que se calculan las integrales. Se ha utilizado el siguiente criterio

$$q = m(1 + b)/2,$$

donde m es el grado máximo del polinomio de Gauss utilizado.

Nótese, que en el segundo caso, el grado del polinomio oscila de un mínimo de $m/2$, para $b = 0$, hasta un máximo de m , para $b = 1$.

Algoritmo 5.2 (Cálculo de la probabilidad de fallo). El método propuesto puede aplicarse utilizando el siguiente algoritmo.

- **Entrada:** Conjunto inicial de variables $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$, su función de densidad conjunta $f_{X_1, X_2, \dots, X_n}(x_1, x_2, \dots, x_n)$, y la región de fallo $g_{\mathbf{X}}(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq 0$.
- **Salida:** La probabilidad de fallo asociada a la región de fallo dada.

Paso 1: Transformación del conjunto inicial de variables \mathbf{X} en un conjunto de variables aleatorias \mathbf{U} independientes con distribución uniforme $U(0, 1)$ mediante la transformación de Rosenblatt o la marginal CDF. Y la región de fallo $g_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$ a la nueva región de fallo $g_{\mathbf{U}}(\mathbf{u})$.

Paso 2: Transformación del conjunto de variables \mathbf{U} en un nuevo conjunto \mathbf{V} , de forma que el vector $(0, 0, \dots, 0)$ sea el más desfavorable desde el punto de vista de la seguridad. Para ello, cámbiese $V_i = U_i$ ó $V_i = 1 - U_i$ según corresponda.

Paso 3: Obtención de las funciones de densidad marginal $f_{V_1, V_2, \dots, V_n}(v_1, v_2, \dots, v_n)$ de las nuevas variables aleatorias y la nueva región de rotura transformada $g_{V_1, V_2, \dots, V_n}(v_1, v_2, \dots, v_n)$.

Paso 4: Obtención de la probabilidad de fallo mediante el procedimiento recursivo (5.25), basado en la fórmula de cuadratura de Gauss-Legendre (5.22).

■

Ejemplo computacional 5.3 (Suma de variables uniformes independientes). Para comprobar el comportamiento del método se asume, en nuestro primer ejemplo, que la región de fallo es

$$\sum_{i=1}^n X_i \leq n/3 - 1,$$

donde $X_i; i = 1, 2, \dots, n$ son n variables aleatorias uniformes independientes igualmente distribuidas $U(0, 1)$. El resultado exacto de la función de distribución asociada a la región de fallo es:

$$F(x) = \frac{1}{n!} \sum_{r=0}^{\lfloor x \rfloor} (-1)^r \binom{n}{r} (x-r)^n; \quad 0 < x < n, \quad (5.26)$$

donde $\lfloor x \rfloor$ es la parte entera de x .

Se ha aplicado la metodología tanto en su versión normal, como optimizada. La tabla ?? muestra la calidad de la aproximación, en función del grado m del polinomio de Gauss utilizado y del número n de variables que intervienen. También hay una comparación con la simulación de Monte Carlo.

A la vista de la tabla ?? se puede concluir lo siguiente:

1. El ahorro en tiempo de computación de la versión optimizada es importante.
2. En cambio la calidad de la aproximación no se ve influenciada por la utilización de uno u otro método, lo cual no deja de ser lógico, ya que la calidad de la aproximación está condicionada al grado máximo del polinomio de Gauss utilizado, y ambas aproximaciones utilizan el mismo valor de m .
3. En el caso de la suma de variables uniformes el grado del polinomio requerido para obtener una buena aproximación al valor exacto de la probabilidad de fallo es muy pequeño. De hecho, con un polinomio de grado cuatro casi se obtienen los valores exactos.
4. El tiempo de cpu requerido aumenta exponencialmente con el número de variables que intervienen.
5. El método optimizado claramente supera a la simulación de Monte Carlo.

■

Ejemplo ilustrativo 5.2 (Cociente de la suma de variables exponenciales independientes). Considérese el mismo caso del ejemplo ilustrativo 5.1

$$Z = \frac{X_1 + X_2}{X_1 + X_2 + X_3}, \quad (5.27)$$

que tiene una función de distribución conocida e igual a

$$F_Z(z) = z^2; \quad 0 \leq z \leq 1.$$

Supóngase que se desea calcular $F_Z(0,999325)$, cuyo valor exacto es 0,998650456, utilizando el método propuesto y el algoritmo 5.2.

Paso 1: Se usa la transformación de Rosenblatt para obtener un conjunto de variables U uniformes independientes $U(0, 1)$. Para ello:

$$\begin{aligned} U_1 &= F_{X_1}(X_1) = 1 - \exp(-\lambda X_1), \\ U_2 &= F_{X_2}(X_2) = 1 - \exp(-\lambda X_2), \\ U_3 &= F_{X_3}(X_3) = 1 - \exp(-\lambda X_3), \end{aligned} \quad (5.28)$$

y la región de fallo transformada, en función de las variables V , resulta

$$g_{\mathbf{U}}(U_1, U_2, U_3) = \frac{\log((1 - U_1)(1 - U_2))}{\log((1 - U_1)(1 - U_2)(1 - U_3))} \leq 0,999325 \quad (5.29)$$

Paso 2: Se transforman las variables U de forma que el vector $(0, 0, 0, \dots, 0)$ sea el vector más desfavorable posible, para ello se utiliza la transformación

$$\begin{aligned} V_1 &= U_1 \\ V_2 &= U_2 \\ V_3 &= 1 - U_3 \end{aligned} \quad (5.30)$$

Paso 3: Dado que las nuevas variables V son variables uniformes idénticamente distribuidas $U(0, 1)$, se tiene que

$$f_{V_1, V_2, \dots, V_n}(v_1, v_2, \dots, v_n) = 1; \quad 0 \leq v_i \leq 1; \quad i = 1, 2, 3,$$

y la región de fallo resulta

$$g_{\mathbf{V}}(v_1, v_2, v_3) = \frac{\log((1 - v_1)(1 - v_2))}{\log((1 - v_1)(1 - v_2)v_3)} \leq 0,999325 \quad (5.31)$$

Paso 4: Se calcula la probabilidad de fallo utilizando la expresión recursiva (5.25).

La tabla 5.4 muestra los resultados obtenidos cuando se usa la versión optimizada y distintos valores de m (grado máximo del polinomio de aproximación de Gauss), así como los valores obtenidos con la simulación de Monte Carlo. Nótese que para $n = 3$ y $m = 10$ la probabilidad es exacta en 5 cifras significativas, y requiere un tick de cpu, mientras que para obtener el mismo grado de aproximación con el método de Monte Carlo se requieren 9319 ticks. ■

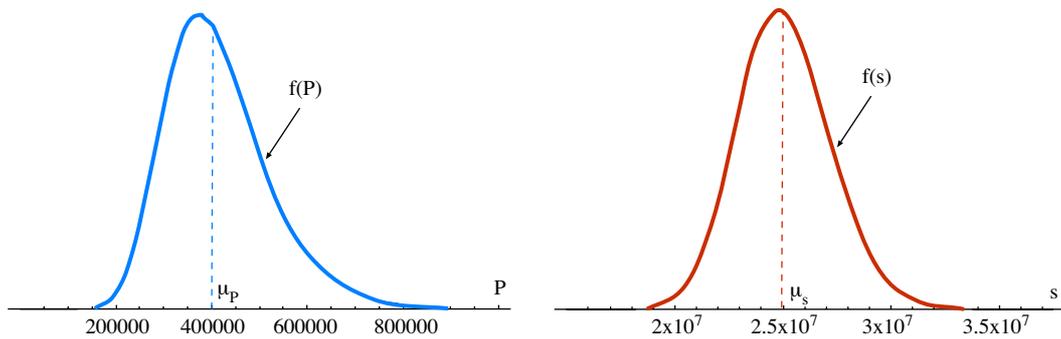
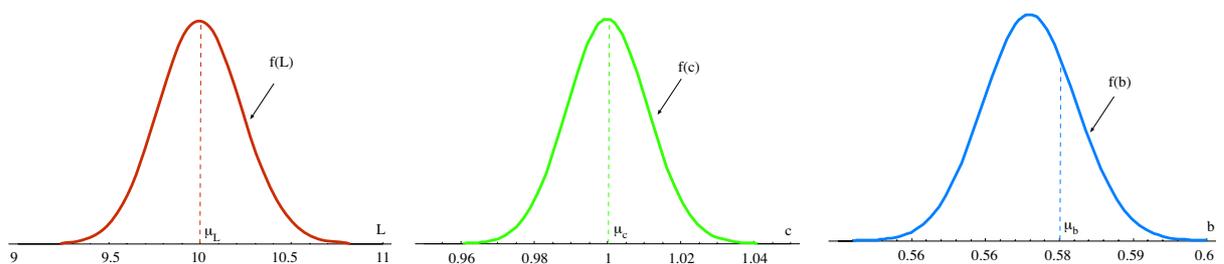
Ejemplo ilustrativo 5.3 (Ejemplo de aplicación). Considérese la viga biapoyada del ejemplo ilustrativo 1.1 (véase la figura 1.9).

Todas las variables que intervienen son exactamente las mismas que en el ejemplo estudiado. Pero para mostrar la aplicabilidad del método propuesto se va a trabajar con dos hipótesis estadísticas:

Caso 1: Distribuciones logarítmico normales independientes. Esta hipótesis es la misma que la del ejemplo 1.1, y nos permite calcular la probabilidad exacta de fallo. Los parámetros de las distribuciones se muestran en la tabla 5.5. Las funciones de densidad marginales de las variables se muestran en las figuras 5.6 y 5.7.

Cuadro 5.4: Estimaciones de la probabilidad de fallo para distintas aproximaciones del método de Gauss-Legendre (versión optimizada).

		Versión optimizada			Simulación Monte Carlo		
n	m	Prob. estimada	Prob. exacta	tiempo (en ticks)	Número de puntos	Prob. estimada	tiempo (en ticks)
3	10	0.998658165	0.998650456	1	10^1	1.000000	0
3	20	0.998652474	0.998650456	9	10^2	1.000000	0
3	30	0.998651367	0.998650456	36	10^3	0.998000	0
3	40	0.998650972	0.998650456	105	10^4	0.998400	1
3	50	0.998650788	0.998650456	247	10^5	0.998530	9
3	60	0.998650687	0.998650456	493	10^6	0.998672	93
3	70	0.998650626	0.998650456	890	10^7	0.998669	932
3	80	0.998650586	0.998650456	1482	10^8	0.998667	9319

Figura 5.6: Distribuciones logarítmico normales para las variables P y s , en el caso 1.Figura 5.7: Distribuciones logarítmico normales para las variables L , b y c , en el caso 1.

Cuadro 5.5: Medias y desviaciones estándar de las 5 variables aleatorias que intervienen en el ejemplo ilustrativo 5.3 para los casos 1 y 2.

Caso 1			
Variable	Distribución	Media	Desviación típica
P	$\log N(\mu_P, \sigma_P^2)$	$\mu_P = \log(400000) = 12,8992$	$\sigma_P = 0,257984$
s	$\log N(\mu_s, \sigma_s^2)$	$\mu_s = \log(25000000) = 17,0344$	$\sigma_s = 0,085172$
L	$\log N(\mu_L, \sigma_L^2)$	$\mu_L = \log(10) = 2,30259$	$\sigma_L = 0,023026$
b	$\log N(\mu_b, \sigma_b^2)$	$\mu_b = \log(0,576) = -0,551648$	$\sigma_b = 0,011033$
c	$\log N(\mu_c, \sigma_c^2)$	$\mu_c = \log(1) = 0$	$\sigma_c = 0,011033$
Caso 2			
P	$N(\mu_P, \sigma_P^2)$	$\mu_P = 413527$	$\sigma_P = 108483$
s	$N(\mu_s, \sigma_s^2)$	$\mu_s = 25091184,69$	$\sigma_s = 2140947,96$
L	$N(\mu_L, \sigma_L^2)$	$\mu_L = 10,0027$	$\sigma_L = 0,23$
b	$N(\mu_b, \sigma_b^2)$	$\mu_b = 0,576035$	$\sigma_b = 0,00635$
c	$N(\mu_c, \sigma_c^2)$	$\mu_c = 1$	$\sigma_c = 0,011033$

Caso 2: Distribuciones normales independientes. Las variables aleatorias P, s, L, b y c se consideran variables normales. Las medias y desviaciones típicas del ejemplo numérico del caso 2 se consideran iguales a las del caso 1. Así, se pueden obtener a partir de las del caso 1 utilizando las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned}\mu_i &= \exp(\mu_i^* + \sigma_i^{*2}/2) \\ \sigma_i^2 &= \exp(\mu_i^*) [\exp(2 * \sigma_i^{*2}) - \exp(\sigma_i^{*2})],\end{aligned}\quad (5.32)$$

donde μ_i^* y σ_i^* son las medias y desviaciones típicas del caso 1, y el subíndice i toma los valores P, s, L, b y c . Los valores numéricos correspondientes se muestran también en la tabla 5.5.

5.3.5. Diseño clásico

El diseño clásico con coeficientes de seguridad es el mismo que el del ejemplo ilustrativo 1.1, en el que se asumía los siguientes valores para las variables:

$$s_0 = 25Mp; \quad P_0 = 400000N; \quad L_0 = 10m; \quad \gamma_P = 1,6; \quad \gamma_s = 1,5, \quad (5.33)$$

Los valores de las variables b_0 y c_0 se toman como:

$$b_0 = 0,576m \text{ and } c_0 = 1,0m. \quad (5.34)$$

La probabilidad de fallo asociada al diseño clásico para las distribuciones estadísticas del primer caso es $p_f = 0,000692289$.

5.3.6. Método propuesto

En esta sección se determina la probabilidad de fallo mediante la aplicación del algoritmo 5.2. Así, se procede de la siguiente manera:

Paso 1: Utilización de la transformación de Rosenblatt para obtener variables \mathbf{U} independientes con distribución uniforme $U(0, 1)$. Para ello, se hace:

$$\begin{aligned} X_1 &= F_{N(\mu_P, \sigma_P^2)}^{-1}(U_1) = \mu_P + \sigma_P \Phi^{-1}(U_1) \\ X_2 &= F_{N(\mu_s, \sigma_s^2)}^{-1}(U_2) = \mu_s + \sigma_s \Phi^{-1}(U_2) \\ X_3 &= F_{N(\mu_L, \sigma_L^2)}^{-1}(U_3) = \mu_L + \sigma_L \Phi^{-1}(U_3) \\ X_4 &= F_{N(\mu_b, \sigma_b^2)}^{-1}(U_4) = \mu_b + \sigma_b \Phi^{-1}(U_4) \\ X_5 &= F_{N(\mu_c, \sigma_c^2)}^{-1}(U_5) = \mu_c + \sigma_c \Phi^{-1}(U_5) \end{aligned} \quad (5.35)$$

donde

$$(X_1, X_2, X_3, X_4, X_5) = \begin{cases} (\log P, \log s, \log L, \log b, \log c) & \text{para el Caso 1} \\ (P, s, L, b, c) & \text{para el Caso 2} \end{cases}$$

eso es,

$$\begin{aligned} U_1 &= F_{(\mu_P, \sigma_P^2)}(X_1) = \Phi\left(\frac{X_1 - \mu_P}{\sigma_P}\right) \\ U_2 &= F_{(\mu_s, \sigma_s^2)}(X_2) = \Phi\left(\frac{X_2 - \mu_s}{\sigma_s}\right) \\ U_3 &= F_{(\mu_L, \sigma_L^2)}(X_3) = \Phi\left(\frac{X_3 - \mu_L}{\sigma_L}\right) \\ U_4 &= F_{(\mu_b, \sigma_b^2)}(X_4) = \Phi\left(\frac{X_4 - \mu_b}{\sigma_b}\right) \\ U_5 &= F_{(\mu_c, \sigma_c^2)}(X_5) = \Phi\left(\frac{X_5 - \mu_c}{\sigma_c}\right). \end{aligned} \quad (5.36)$$

Y la región de fallo en términos de las variables U resulta:

Caso 1:

$$\begin{aligned} -\mu_P - \sigma_P \Phi^{-1}(U_1) + \mu_s + \sigma_s \Phi^{-1}(U_2) - \mu_L - \sigma_L \Phi^{-1}(U_3) + \mu_b + \sigma_b \Phi^{-1}(U_4) \\ + 2\mu_c + 2\sigma_c \Phi^{-1}(U_5) \leq \log \frac{3}{2}. \end{aligned} \quad (5.37)$$

Caso 2:

$$\mu_s + \sigma_s \Phi^{-1}(U_2) - \frac{3(\mu_P + \sigma_P \Phi^{-1}(U_1))(\mu_L + \sigma_L \Phi^{-1}(U_3))}{2 * (b_0 + \sigma_b \Phi^{-1}(U_4))(c_0 + \sigma_c \Phi^{-1}(U_5))^2} \leq 0. \quad (5.38)$$

Paso 2: Transformación del conjunto de variables \mathbf{U} en un nuevo conjunto \mathbf{V} , de forma que el vector $(0, 0, \dots, 0)$ sea el más desfavorable desde el punto de vista de la seguridad. Para ello, se hace:

$$\begin{aligned} V_1 &= 1 - U_1 \\ V_2 &= U_2 \\ V_3 &= 1 - U_3 \\ V_4 &= U_4 \\ V_5 &= U_5 \end{aligned} \quad (5.39)$$

Cuadro 5.6: Estimaciones de la probabilidad de fallo para distintos valores de los parámetros del método de integración de Gauss-Legendre en su versión optimizada.

Caso 1							
		Optimizada			Simulación de Monte Carlo		
n	m	Probabilidad estimada	Probabilidad exacta	cpu (en ticks)	Número de puntos	Probabilidad estimada	cpu (en ticks)
5	5	0.000000	0.000696	1	10^3	0.001000	0
5	10	0.000001	0.000696	11	10^4	0.001100	3
5	20	0.000307	0.000696	250	10^5	0.000830	28
5	30	0.000555	0.000696	1649	10^6	0.000711	288
5	40	0.000657	0.000696	6834	10^7	0.000694	2874
5	50	0.000692	0.000696	21896	10^8	0.000701	28735
Caso 2							
5	10	0.000000	-	14	10^4	0.000000	3
5	20	0.000009	-	252	10^5	0.000030	28
5	40	0.000024	-	5970	10^6	0.000038	280
5	60	0.000029	-	47234	10^7	0.000033	2795
5	80	0.000031	-	219468	10^8	0.000032	27943
5	100	0.000032	-	753609	10^9	0.000032	279428

Paso 3: Dado que las nuevas variables V están idénticamente distribuidas $U(0, 1)$, se obtiene

$$f_{V_1, V_2, \dots, V_n}(v_1, v_2, \dots, v_n) = 1; \quad 0 \leq v_i \leq 1; \quad i = 1, 2, 3, 4, 5,$$

y la región de fallo transformada queda como $g_V(v_1, v_2, \dots, v_n)$, véase (5.40):

Caso 1:

$$\begin{aligned} & -\mu_P - \sigma_P \Phi^{-1}(1 - v_1) + \mu_s + \sigma_s \Phi^{-1}(v_2) \\ & -\mu_L - \sigma_L \Phi^{-1}(1 - v_3) + \mu_b + \sigma_b \Phi^{-1}(v_4) + 2\mu_c + 2\sigma_c \Phi^{-1}(v_5) \leq \log \frac{3}{2}. \end{aligned} \quad (5.40)$$

Caso 2:

$$\mu_s + \sigma_s \Phi^{-1}(v_2) - \frac{3(\mu_P + \sigma_P \Phi^{-1}(1 - v_1)) * (\mu_L + \sigma_L \Phi^{-1}(1 - v_3))}{2(\mu_b + \sigma_b \Phi^{-1}(v_4)) * (\mu_c + \sigma_c \Phi^{-1}(v_5))^2} \leq 0. \quad (5.41)$$

Paso 4: Obtención de la probabilidad de fallo mediante el procedimiento recursivo (5.25), basado en la fórmula de cuadratura de Gauss-Legendre (5.22).

La tabla 5.6 muestra los resultados obtenidos utilizando los valores numéricos de la tabla 5.5 y el método optimizado para el Caso 1. Nótese que se requiere un polinomio de grado 50 para obtener una probabilidad casi exacta. ■

Comentario 5.2 *Las probabilidades de fallo para los casos 1 y 2 son 0,000696 y 0,000032, respectivamente. Esto implica más de un orden de magnitud, y muestra la gran sensibilidad a las distribuciones estadísticas seleccionadas para las variables, incluso aunque las distribuciones normal y logarítmico normal pertenecen al dominio de atracción de Gumbel (véase Galambos [84] y Castillo [27]).* ■

Capítulo 6

Aportaciones a las Técnicas de Optimización por Descomposición

6.1. Introducción

En este capítulo se presentan dos aportaciones a los métodos de optimización por descomposición. Inicialmente surgieron para la resolución de problemas basados en fiabilidad, pero pueden utilizarse para otras aplicaciones.

6.2. Métodos Alternativos de Descomposición

En el capítulo 4 se han descrito procedimientos de descomposición estándar. En esta sección se describen procedimientos alternativos para resolver problemas con una estructura característica, que se presenta en una gran cantidad de aplicaciones en la ingeniería.

La estructura que nos interesa viene dada por el siguiente problema:

$$\underset{\mathbf{x}}{\text{Minimizar}} \quad c(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \quad (6.1)$$

sujeto a

$$\mathbf{h}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{h}_0 \quad (6.2)$$

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq \mathbf{0} \quad (6.3)$$

$$\mathbf{x}^{\text{lo}} \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{x}^{\text{up}} \quad (6.4)$$

donde la función $\mathbf{h}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ no puede evaluarse de forma sencilla. Por ejemplo,

$$h_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \underset{\mathbf{u}, \mathbf{v}}{\text{Mínimo}} \quad \ell_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \mathbf{u}, \mathbf{v}) \quad (6.5)$$

sujeto a

$$r_i(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = k. \quad (6.6)$$

La principal dificultad de este problema es que la restricción (6.2) no puede incorporarse en los paquetes de optimización estándar, por lo que se necesita un procedimiento de descomposición.

6.2.1. Método de Relajación

El primero de los métodos para resolver el problema anterior es un método de relajación para eliminar las restricciones de complicación.

Bajo ciertas circunstancias, la solución del problema (6.1)-(6.4) puede obtenerse como el límite de una secuencia $\{P^{(n)} : n = 1, 2, \dots\}$ de problemas, donde P_n consiste en:

$$\text{Minimizar } c(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \quad (6.7)$$

$$\mathbf{x}$$

sujeto a

$$\mathbf{r}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{r}_0^{(n)} \quad (6.8)$$

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq \mathbf{0} \quad (6.9)$$

$$\mathbf{x}^{\text{lo}} \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{x}^{\text{up}} \quad (6.10)$$

donde $\mathbf{h}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ se ha reemplazado por $\mathbf{r}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, que puede implementarse fácilmente en cualquier paquete de optimización estándar. Una regla para obtener $\mathbf{r}_0^{(n)}$ viene dada por:

$$\mathbf{r}_0^{(n+1)} = \mathbf{r}_0^{(n)} + \rho(\mathbf{h}_0 - \mathbf{h}^{(n)})$$

donde $\mathbf{h}^{(n)}$ es el vector de soluciones de los problemas (6.5)-(6.6) para (\mathbf{x}, \mathbf{y}) , la solución óptima del problema $P^{(n)}$.

Alternativamente, si se dispone la variable dual $\boldsymbol{\lambda}$ asociada a la restricción (6.6) se podría utilizar el desarrollo en serie de Taylor para actualizar el valor de $\mathbf{r}_0^{(n)}$:

$$\mathbf{h}_0 = \mathbf{h}^{(n)} + \frac{\partial \mathbf{h}^{(n)}}{\partial \mathbf{r}_0^{(n)}} \left(\mathbf{r}_0^{(n+1)} - \mathbf{r}_0^{(n)} \right) \quad (6.11)$$

$$\mathbf{h}_0 = \mathbf{h}^{(n)} + \boldsymbol{\lambda} \left(\mathbf{r}_0^{(n+1)} - \mathbf{r}_0^{(n)} \right) \quad (6.12)$$

de donde

$$\mathbf{r}_0^{(n+1)} = \mathbf{r}_0^{(n)} + \frac{(\mathbf{h}_0 - \mathbf{h}^{(n)})}{\boldsymbol{\lambda}}. \quad (6.13)$$

Esto requiere la existencia de una correspondencia regular incremental $\mathbf{h}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{q}(\mathbf{r}(\mathbf{x}, \mathbf{y}))$, entre $\mathbf{h}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ y $\mathbf{r}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, que se llamará $\mathbf{h} = \mathbf{q}(\mathbf{r})$.

De forma más precisa, para resolver el problema inicial (6.1)-(6.4) se propone el siguiente algoritmo:

Algoritmo 6.1 (Algoritmo de relajación).

Entrada. El problema (6.1)-(6.4), un coeficiente de relajación ρ , valor inicial \mathbf{r}_0 , y la tolerancia ϵ para controlar la convergencia.

Salida. La solución del problema (6.1)-(6.4) con su error.

Paso 0: Iniciación. Iniciar el contador de iteraciones, $n = 1$ y fijar los valores de $\mathbf{r}_0^{(n)}$ a los valores iniciales \mathbf{r}_0 para la primera iteración.

Paso 1: Solución del problema maestro. Resolver el problema:

$$\underset{\mathbf{x}}{\text{Minimizar}} \quad c(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \quad (6.14)$$

sujeto a

$$\mathbf{r}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{r}_0^{(n)} \quad (6.15)$$

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq \mathbf{0} \quad (6.16)$$

$$\mathbf{x}^{\text{lo}} \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{x}^{\text{up}} \quad (6.17)$$

y obtener su solución $(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*)$.

Paso 2: Solución de los subproblemas. Obtener, para todos los valores de i , los valores

$$h_i^{(n)}(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*) = \underset{\mathbf{u}, \mathbf{v}}{\text{Mínimo}} \quad \ell_i(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*; \mathbf{u}, \mathbf{v}) \quad (6.18)$$

sujeto a

$$r_i(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = k; \lambda_i \quad (6.19)$$

donde λ_i es la variable dual asociada a la restricción (6.19).

Paso 3: Comprobación de la convergencia. Si $\|\mathbf{h}^{(n)} - \mathbf{h}_0\| < \epsilon$ parar el proceso, se ha alcanzado la solución. Si no, continuar en el paso 4.

Paso 4: Actualizar los límites \mathbf{r}_0 . Usar la fórmula:

$$\mathbf{r}_0^{(n+1)} = \mathbf{r}_0^{(n)} + \rho(\mathbf{h}_0 - \mathbf{h}^{(n)}),$$

o

$$\mathbf{r}_0^{(n+1)} = \mathbf{r}_0^{(n)} + \frac{(\mathbf{h}_0 - \mathbf{h}^{(n)})}{\lambda},$$

incrementar el contador de iteraciones en una unidad $n = n + 1$, e ir al paso 1. ■

Teorema 6.1 (Convergencia del Algoritmo 6.1). *Bajo ciertas condiciones de regularidad, que garantizan la existencia del desarrollo en serie de Taylor de $\mathbf{q}(\mathbf{r})$ y $\|\mathbf{I}_m - \rho \nabla \mathbf{q}(\mathbf{r}_+^{(n)})\| < 1$, el algoritmo anterior con el coeficiente de relajación conduce a la solución del problema (6.1)-(6.6).*

Demostración. Asumiendo ciertas condiciones de regularidad, la convergencia del algoritmo puede justificarse como sigue.

$$\begin{aligned}
\mathbf{h}^{(n+1)} &= \mathbf{q}(\mathbf{r}_0^{(n+1)}) = \mathbf{q}(\mathbf{r}_0^{(n)} + \rho(\mathbf{h}_0 - \mathbf{h}^{(n)})) \\
&= \mathbf{q}(\mathbf{r}_0^{(n)}) + \rho \nabla \mathbf{q}(\mathbf{r}_+^{(n)})(\mathbf{h}_0 - \mathbf{h}^{(n)}) \\
&= \mathbf{h}^{(n)} + \rho \nabla \mathbf{q}(\mathbf{r}_+^{(n)})(\mathbf{h}_0 - \mathbf{h}^{(n)}) \\
&= \left(\mathbf{I}_m - \rho \nabla \mathbf{q}(\mathbf{r}_+^{(n)}) \right) \mathbf{h}^{(n)} + \rho \nabla \mathbf{q}(\mathbf{r}_+^{(n)}) \mathbf{h}_0 \\
&= (\mathbf{I}_m - \rho \mathbf{Q}_n) \mathbf{h}^{(n)} + \rho \mathbf{Q}_n \mathbf{h}_0
\end{aligned}$$

donde $\mathbf{r}_+^{(n)}$ es el punto intermedio usualmente usado en el desarrollo en serie de Taylor, \mathbf{I}_m es la matriz de identidad cuya dimensión m es la misma de \mathbf{h} , y $\mathbf{Q}_n = \nabla \mathbf{q}(\mathbf{r}_+^{(n)})$. Entonces, se tiene:

$$\mathbf{h}^{(n)} = \left(\prod_{i=1}^{n-1} (\mathbf{I}_m - \rho \mathbf{Q}_i) \right) \mathbf{h}^{(1)} + \rho \left(\sum_{j=1}^{n-1} \mathbf{Q}_j \prod_{s=j+1}^{n-1} (\mathbf{I}_m - \rho \mathbf{Q}_s) \right) \mathbf{h}_0$$

en la que para valores adecuados de ρ y las condiciones de regularidad, incluyendo $\|\mathbf{I}_m - \rho \mathbf{Q}_i\| < 1$, converge a \mathbf{h}_0 . ■

Ejemplo ilustrativo 6.1 (Método de Relajación). Considérese el problema:

$$\begin{aligned}
&\text{Minimizar} && (x_1 + x_2 - 2)^2 + (x_3 + x_4 - 2)^2 && (6.20) \\
&x_1, x_2, x_3, x_4
\end{aligned}$$

sujeto a

$$h_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 1, 2 \quad (6.21)$$

$$h_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 6 \quad (6.22)$$

donde la función $\mathbf{h}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ se define como:

$$h_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \underset{u_1, u_2, u_3, u_4}{\text{Mínimo}} \sum_{i=1}^4 (u_i - x_i)^2 \quad (6.23)$$

sujeto a

$$3u_1 + u_2 + 2u_3 + u_4 = 6 \quad (6.24)$$

y

$$h_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \underset{u_1, u_2, u_3, u_4}{\text{Mínimo}} \sum_{i=1}^4 (u_i - x_i)^2 \quad (6.25)$$

sujeto a

$$u_1 + u_2 + u_3 + 2u_4 = 7 \quad (6.26)$$

Cuadro 6.1: Procedimiento iterativo hasta que se obtiene la solución en el ejemplo ilustrativo 6.1.

n	x_1	x_2	x_3	x_4	r_1	r_2	h_1	h_2	c	$error$
1	0.50	1.50	2.00	0.00	7.56	6.36	0.07	1.29	0.00	23.49816
2	1.68	0.40	0.00	2.14	8.05	9.33	0.22	0.06	0.03	36.25063
3	1.03	1.64	0.00	3.33	8.46	11.88	0.38	0.90	2.21	26.64688
4	0.47	2.71	0.00	4.35	8.67	12.82	0.78	4.11	6.91	3.76708
5	0.29	3.08	0.00	4.73	8.42	12.72	1.71	6.21	9.31	0.30644
6	0.19	3.15	0.00	4.69	8.15	12.65	1.73	6.15	9.03	0.29960
7	0.08	3.25	0.00	4.66	7.84	12.55	1.82	6.20	8.83	0.42641
8	0.00	3.14	0.00	4.71	7.59	12.47	1.69	6.15	8.61	0.26849
9	0.00	2.72	0.00	4.88	7.56	12.48	1.27	5.98	8.79	0.00513
10	0.00	2.64	0.00	4.92	7.55	12.48	1.21	6.00	8.93	0.00022
11	0.00	2.63	0.00	4.93	7.55	12.48	1.20	6.00	8.95	0.00001
12	0.00	2.62	0.00	4.93	7.55	12.48	1.20	6.00	8.96	0.00000
13	0.00	2.62	0.00	4.93	7.55	12.48	1.20	6.00	8.96	0.00000

La solución del problema (6.20)-(6.26) puede obtenerse como el límite de las soluciones de la secuencia $\{P^{(n)} : n = 1, 2, \dots\}$ de problemas:

$$\begin{aligned} \text{Minimizar} \quad & (x_1 + x_2 - 2)^2 + (x_3 + x_4 - 2)^2 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \end{aligned} \quad (6.27)$$

sujeto a

$$3x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = r_1^{(n)} \quad (6.28)$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = r_2^{(n)} \quad (6.29)$$

y la regla para actualizar el parámetro $\mathbf{r}_0^{(n)}$:

$$\begin{pmatrix} r_1^{(n+1)} \\ r_2^{(n+1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1^{(n)} \\ r_2^{(n)} \end{pmatrix} + 0,5 \begin{pmatrix} 1,2 - h_1^{(n)} \\ 6 - h_2^{(n)} \end{pmatrix}$$

La tabla 6.1 muestra la evolución del procedimiento iterativo en la que se pueden ver los valores de las variables y del error $\|\mathbf{h}_0 - \mathbf{h}^{(n)}\|$, para los datos siguientes:

$$\rho = 0,5; \quad r_{01}^{(1)} = 7; \quad r_{02}^{(1)} = 4; \quad \epsilon = 0,00001.$$

■

Ejemplo computacional 6.1 (Aplicación de la técnica de relajación). Dado el problema

$$\begin{aligned} \text{Minimizar} \quad & c(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \text{Minimizar} \quad \left(\frac{x_1}{y_1}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{y_2}\right)^2 \\ & \mathbf{x} \quad \quad \quad x_1, x_2 \end{aligned} \quad (6.30)$$

sujeto a

$$g_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{x_1 x_2}{y_1 y_2} \geq g_1^0 \quad (6.31)$$

$$g_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{x_2}{y_2} \sqrt{\frac{y_1}{x_1}} \geq g_2^0 \quad (6.32)$$

$$\mathbf{h}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \geq \mathbf{h}_0 \quad (6.33)$$

$$(6.34)$$

donde la función $\mathbf{h}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ es la solución del siguiente problema para $i = 1, 2$

$$h_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \underset{u_1, u_2, v_1, v_2}{\text{Mínimo}} \sqrt{\left(\frac{u_1 - x_1}{x_1 v_{x_1}}\right)^2 + \left(\frac{u_2 - x_2}{x_2 v_{x_2}}\right)^2 + \left(\frac{v_1 - y_1}{y_1 v_{y_1}}\right)^2 + \left(\frac{v_2 - y_2}{y_2 v_{y_2}}\right)^2} \quad (6.35)$$

sujeto a

$$g_i(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 1, \quad (6.36)$$

donde

$$g_1(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \frac{u_1 u_2}{v_1 v_2} \quad \text{y} \quad g_2(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \frac{u_2}{v_2} \sqrt{\frac{v_1}{u_1}}.$$

Suponiendo que los datos del problema son:

$$y_1 = 1,0; \quad y_2 = 1,0; \quad v_{x_1} = 0,02; \quad v_{x_2} = 0,02; \quad v_{y_1} = 0,1; \quad v_{y_2} = 0,1;$$

$$g_1^0 = 1,2; \quad g_2^0 = 1,6; \quad h_1^0 = 3,0; \quad h_2^0 = 4,0,$$

y tomando como valores iniciales de la variable $\mathbf{x} = (5,0, 5,0)^T$ se resuelve el problema mediante la actualización automática del parámetro $\mathbf{g}^{(n)}$ con la fórmula (6.13). De esta forma no hay que definir el coeficiente de relajación ρ . En la figura 6.1 se muestra la interpretación gráfica del problema y se muestra que la solución óptima se alcanza para los valores $\mathbf{x}^* = (0,951, 1,560)^T$, con un valor de la función objetivo de $f(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*) = 3,340$. En la tabla 6.2 se muestra la evolución de método hasta alcanzar la solución del problema, se puede comprobar que converge en sólo 6 iteraciones.

Posteriormente se han realizado varias ejecuciones del mismo problema usando distintos valores del coeficiente de relajación $\rho = (0,05, 0,1, 0,2, 0,3, 0,4)$. Todos ellos convergen a la misma solución, excepto con $\rho = 0,4$. En la figura 6.2 se muestra la evolución del error con los distintos valores de ρ , de la cual se pueden extraer las siguientes conclusiones:

1. El procedimiento siempre converge a la solución si el coeficiente ρ es muy pequeño, aun así, lo hace de manera lenta para valores excesivamente pequeños.
2. Conforme aumentamos el valor de ρ , el método se comporta mejor convergiendo cada vez más rápido, hasta que se alcanza un valor óptimo ρ^* en el que el número de iteraciones es mínimo. En este ejemplo está en torno al $\rho^* \approx 0,2$.
3. Si se aumenta el valor de ρ por encima del valor óptimo, la convergencia empeora hasta que llega un momento ($\rho \approx 0,4$) en el que la solución comienza a oscilar y no converge.

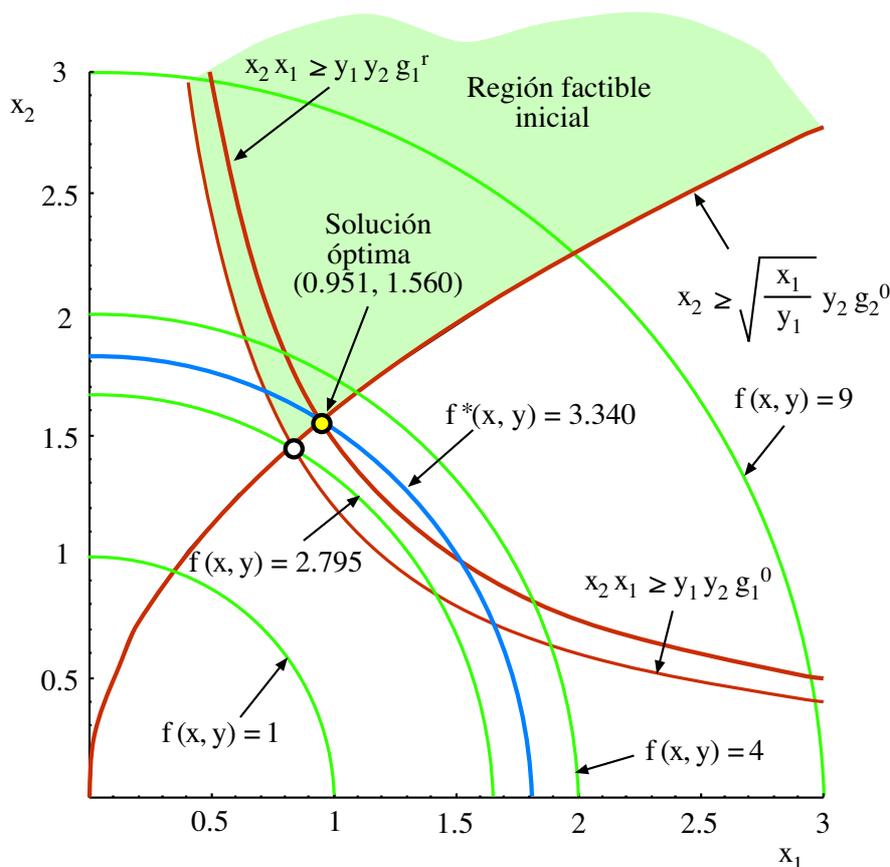


Figura 6.1: Ilustración gráfica del ejemplo computacional 6.1.

4. La resolución del problema mediante la fórmula de actualización (6.13) es aproximadamente equivalente (siempre mejor) a la actualización con el coeficiente de relajación óptimo ρ^* en términos de velocidad de convergencia. Pero sólo cuando se está cerca de la solución óptima, en ciertos casos, si se está lejos de la solución final la utilización de la fórmula puede provocar grandes variaciones en los valores actualizados que hacen que los modelos sean infactibles. Hay que ser muy cuidadoso utilizando ambas metodologías.
5. Los problemas que presentan ambos métodos de actualización pueden utilizarse para generar modelos mixtos que combinen las dos técnicas para que el parámetro inicial ρ actúe de factor de relajación de la variable dual λ actualizadora, de forma que se tome un parámetro actualizador combinado diferente para cada parámetro.

■

En el apéndice A.1 se presenta la implementación en GAMS del método de relajación.

Cuadro 6.2: Ilustración del procedimiento iterativo para el ejemplo computacional 6.1.

n	$x_1^{(n)}$	$x_2^{(n)}$	$g_1^{(n)}$	$g_1^{(n)}$	$h_1^{(n)}$	$h_1^{(n)}$	$error^{(\nu)}$
1	0.825	1.454	1.200	1.600	1.319	4.419	1.2752713
2	0.943	1.554	1.466	1.600	2.895	4.419	0.5445521
3	0.951	1.560	1.484	1.600	2.998	4.419	0.0342347
4	0.951	1.560	1.484	1.600	3.000	4.419	0.0007747
5	0.951	1.560	1.484	1.600	3.000	4.419	0.0000155
6	0.951	1.560	1.484	1.600	3.000	4.419	0.0000003

6.2.2. Método de los hiperplanos aproximantes

Considérese el mismo problema (6.1)-(6.4), o cualquier otro problema con restricciones de complicación. El principal inconveniente de esos problemas es que las restricciones de complicación no pueden incorporarse en los paquetes de optimización estándar, por lo que se necesita un procedimiento de descomposición.

Una posible solución alternativa al método anterior es la aproximación de la restricción en el problema global mediante hiperplanos aproximantes (Castillo et al. [28]) de la siguiente manera. Sea ν la iteración actual:

$$\underset{\mathbf{x}}{\text{Minimizar}} \quad c(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \quad (6.37)$$

sujeto a

$$\mathbf{h}^{(s)} + \sum_{\forall i} \frac{\partial h_i^{(s)}}{\partial \mathbf{x}^{(s)}} (\mathbf{x} - \mathbf{x}^{(s)}) = \mathbf{h}_0; \quad s = 1, 2, \dots, \nu - 1 \quad (6.38)$$

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq \mathbf{0} \quad (6.39)$$

$$\mathbf{x}^{\text{lo}} \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{x}^{\text{up}} \quad (6.40)$$

de donde se obtiene el valor óptimo de $\mathbf{x}^{(\nu)}$, que se emplea para calcular el nuevo valor de la función $\mathbf{h}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$

$$h_i^{(\nu)}(\mathbf{x}^{(\nu)}, \mathbf{y}) = \underset{\mathbf{u}, \mathbf{v}}{\text{Mínimo}} \quad \ell_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \mathbf{u}, \mathbf{v}) \quad (6.41)$$

sujeto a

$$r_i(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = k \quad (6.42)$$

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}^{(\nu)} : \boldsymbol{\lambda}_i^{(\nu)} \quad (6.43)$$

donde $\boldsymbol{\lambda}_i^{(\nu)} = \partial h_i^{(\nu)} / \partial \mathbf{x}^{(\nu)}$ es un vector con las variables duales asociadas a la restricción 6.43, que fija los valores de las variables de diseño \mathbf{x} a los valores obtenidos del problema maestro (6.13)-(6.40), $\mathbf{x}^{(\nu)}$.

Algoritmo 6.2 (Algoritmo de los hiperplanos aproximantes).

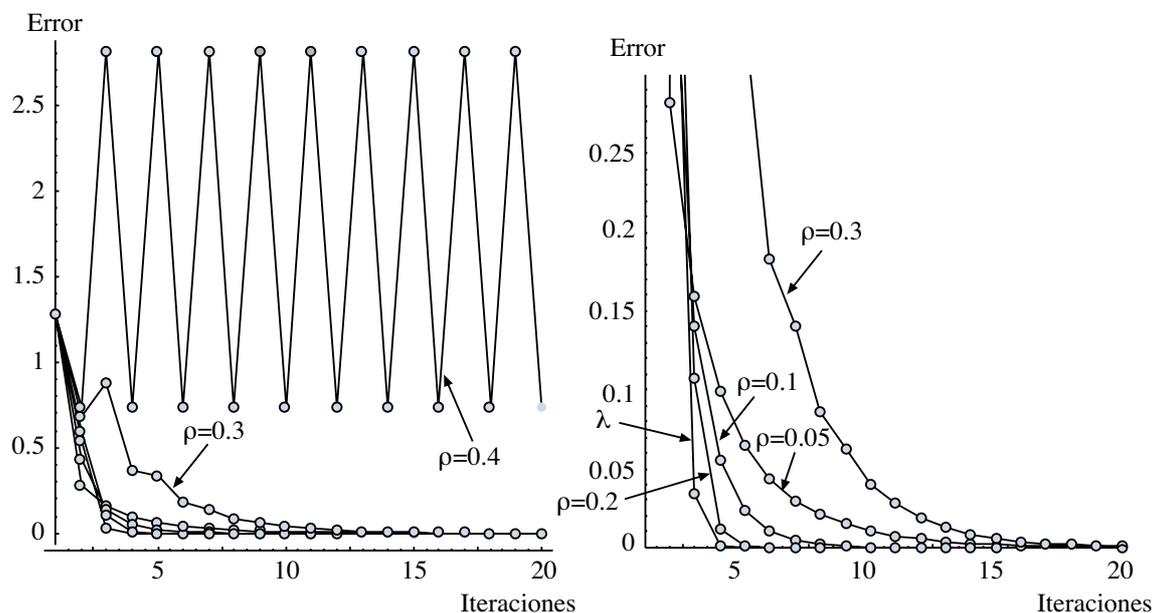


Figura 6.2: Evolución del error para distintos valores de coeficiente de relajación ρ y con el método de actualización dual λ .

Entrada. El problema (6.1)-(6.4), y la tolerancia ϵ para controlar la convergencia.

Salida. La solución del problema (6.1)-(6.4) con su error.

Paso 0: Inicialización. Iniciar el contador de iteraciones, $\nu = 1$.

Paso 1: Solución del problema maestro. Resolver el problema:

$$\underset{\mathbf{x}}{\text{Minimizar}} \quad c(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \quad (6.44)$$

sujeto a

$$\mathbf{h}^{(s)} + \sum_{\forall i} \frac{\partial h_i^{(s)}}{\partial \mathbf{x}^{(s)}} (\mathbf{x} - \mathbf{x}^{(s)}) = \mathbf{h}_0; \quad s = 1, 2, \dots, \nu - 1 \quad (6.45)$$

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq \mathbf{0} \quad (6.46)$$

$$\mathbf{x}^{\text{lo}} \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{x}^{\text{up}} \quad (6.47)$$

y obtener su solución $(\mathbf{x}^{(\nu)}, \mathbf{y}^{(\nu)})$. Inicialmente, cuando $\nu = 1$ la restricción (6.45) no contiene ningún hiperplano. Posteriormente se van añadiendo, así se va reconstruyendo la restricción de complicación mediante hiperplanos.

Paso 2: Solución de los subproblemas. Obtener, para todos los valores de i , los valores

$$h_i^{(\nu)}(\mathbf{x}^{(\nu)}, \mathbf{y}) = \underset{\mathbf{u}, \mathbf{v}}{\text{Mínimo}} \quad \ell_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \mathbf{u}, \mathbf{v}) \quad (6.48)$$

sujeto a

$$r_i(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = k \quad (6.49)$$

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}^{(\nu)} : \boldsymbol{\lambda}_i^{(\nu)} \quad (6.50)$$

donde $\boldsymbol{\lambda}_i^{(\nu)}$ es el vector dual asociado a la restricción (6.50).

Paso 3: Comprobación de la convergencia. Si $\|\mathbf{h}^{(\nu)} - \mathbf{h}_0\| < \epsilon$ parar el proceso, se ha alcanzado la solución. Si no, incrementar el contador de iteraciones en una unidad $\nu = \nu + 1$, e ir al paso 1. ■

Nótese, que la principal ventaja de este método con respecto al de relajación de la subsección 6.2.1 es que no necesita actualización de ningún parámetro, conforme se resuelven los subproblemas con distintos valores de las variables de diseño, se va reconstruyendo la restricción de complicación mediante hiperplanos que se incorporan en el problema maestro o global.

Ejemplo computacional 6.2 (Aplicación de la aproximación por hiperplanos).

A continuación vamos a resolver el mismo ejemplo del ejemplo computacional 6.1 con la aproximación por hiperplanos:

$$\underset{\mathbf{x}}{\text{Minimizar}} \quad c(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \underset{x_1, x_2}{\text{Minimizar}} \quad \left(\frac{x_1}{y_1}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{y_2}\right)^2 \quad (6.51)$$

sujeto a

$$g_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{x_1 x_2}{y_1 y_2} \geq g_1^0 \quad (6.52)$$

$$g_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{x_2}{y_2} \sqrt{\frac{y_1}{x_1}} \geq g_2^0 \quad (6.53)$$

$$\mathbf{h}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \geq \mathbf{h}_0 \quad (6.54)$$

$$(6.55)$$

donde la función $\mathbf{h}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ es la solución del siguiente problema para $i = 1, 2$

$$h_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \underset{u_1, u_2, v_1, v_2}{\text{Mínimo}} \quad \sqrt{\left(\frac{u_1 - x_1}{x_1 v_{x_1}}\right)^2 + \left(\frac{u_2 - x_2}{x_2 v_{x_2}}\right)^2 + \left(\frac{v_1 - y_1}{y_1 v_{y_1}}\right)^2 + \left(\frac{v_2 - y_2}{y_2 v_{y_2}}\right)^2} \quad (6.56)$$

sujeto a

$$g_i(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 1, \quad (6.57)$$

donde

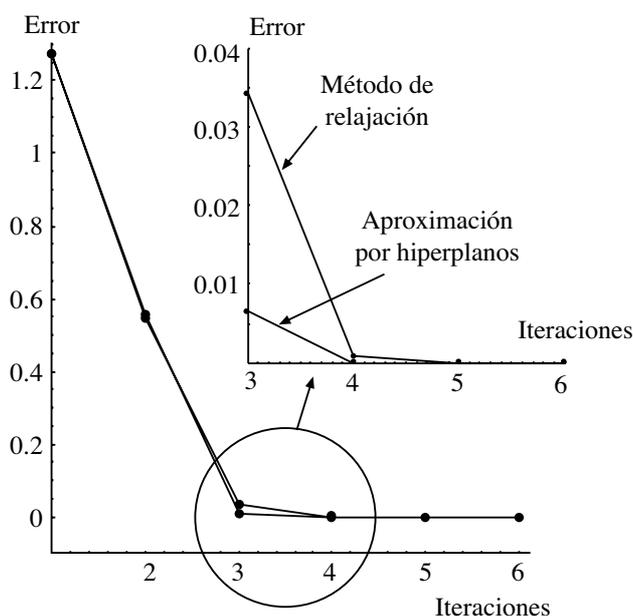
$$g_1(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \frac{u_1 u_2}{v_1 v_2} \quad \text{y} \quad g_2(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \frac{u_2}{v_2} \sqrt{\frac{v_1}{u_1}}.$$

Suponiendo que los datos del problema son los mismos:

$$y_1 = 1,0; \quad y_2 = 1,0; \quad v_{x_1} = 0,02; \quad v_{x_2} = 0,02; \quad v_{y_1} = 0,1; \quad v_{y_2} = 0,1;$$

Cuadro 6.3: Ilustración del procedimiento iterativo para el ejemplo computacional 6.2.

ν	$x_1^{(\nu)}$	$x_2^{(\nu)}$	$g_1^{(\nu)}$	$g_2^{(\nu)}$	$h_1^{(\nu)}$	$h_2^{(\nu)}$	$error^{(\nu)}$
1	0.825	1.454	1.200	1.600	1.319	4.419	1.2752713
2	0.950	1.559	1.481	1.600	2.980	4.419	0.5576132
3	0.951	1.560	1.484	1.600	3.000	4.419	0.0065065
4	0.951	1.560	1.484	1.600	3.000	4.419	0.0000009

Figura 6.3: Evolución del error con el método de aproximación por hiperplanos y con el de relajación con el método de actualización dual λ .

$$g_1^0 = 1,2; \quad g_2^0 = 1,6; \quad h_1^0 = 3,0; \quad h_2^0 = 4,0,$$

y tomando como valores iniciales de la variable $\mathbf{x} = (5,0,5,0)^T$. En la tabla 6.3 se muestra la evolución de método hasta alcanzar la solución del problema, que como era de esperar es la misma que la obtenida anteriormente con el método de relajación, $\mathbf{x}^* = (0,951,1,560)^T$, con un valor de la función objetivo de $f(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*) = 3,340$.

En este caso el método se comporta incluso mejor, convergiendo en cuatro iteraciones. Este comportamiento no es casual, y se puede concluir que este es el método que mejor comportamiento tiene. Al igual que el método de Newton para resolver raíces de ecuaciones tiene una convergencia cuadrática. En la figura 6.3 se ilustra una comparación de la evolución del error entre este método y el de relajación con actualización automática mediante variables duales, si bien el comportamiento es comparable, el primero funciona mejor y será preferible aplicarlo en todos los casos. ■

En el apéndice A.2 se presenta la implementación en GAMS del método de la aproximación por hiperplanos.

6.3. Análisis de Sensibilidad

6.3.1. Introducción

El análisis de sensibilidad es el estudio de como la variación de los parámetros que intervienen en un determinado modelo, afectan, cuantitativa o cualitativamente, a la solución del problema. El objetivo de los estudios de sensibilidad es determinar la dependencia del modelo a los datos que intervienen, con lo cual se aumenta la confianza del mismo y de sus predicciones, proporcionando el conocimiento de cómo afectan los cambios en los datos en la respuesta del modelo.

6.3.2. Sensibilidad en optimización restringida. Método general.

Todo problema de optimización genérico como el (3.2)-(3.4) se dice que ha alcanzado las condiciones de optimalidad cuando se cumplen las condiciones de Karush-Kuhn-Tucker (véase la definición 3.1) en el punto solución.

La sensibilidad de un parámetro se determina teniendo en cuenta que las condiciones de Karush-Kuhn-Tucker han de satisfacerse si se introduce una distorsión pequeña en el parámetro (véase Castillo et al. [39], Vanderplaats [164], Bazaraa, Sherali y Shetty [14] o Luenberger [113]).

Prescindiendo de un estudio más exhaustivo y riguroso sobre métodos estándar de sensibilidad se va a introducir un método general muy útil desde el punto de vista práctico. La idea es muy simple, asumiendo que se desea obtener la sensibilidad de la función objetivo a cambios en los datos, se convierten éstos en variables artificiales y se añaden restricciones que fijen los valores de estas variables a los valores de los parámetros, con lo cual las variables duales asociadas a esas restricciones nos darán la sensibilidad buscada.

De forma más precisa, considérese el siguiente problema de optimización

$$\text{Minimizar } f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta}_0)$$

sujeto a

$$\mathbf{h}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta}_0) = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta}_0) \leq \mathbf{0}$$

donde $\boldsymbol{\eta}_0$ es el vector de datos o parámetros con respecto a los cuales se desea obtener la sensibilidad.

Para ello, se plantea el problema anterior de la siguiente manera:

$$\text{Minimizar } f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta})$$

sujeto a

$$\mathbf{h}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta}) = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta}) \leq \mathbf{0}$$

$$\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\eta}_0 : \boldsymbol{\lambda}$$

donde los valores de las variables duales $\boldsymbol{\lambda}$ dan la sensibilidad o derivadas parciales de la función objetivo con respecto a los parámetros $\boldsymbol{\eta}_0$.

Un aspecto muy importante desde el punto de vista computacional es la utilización adecuada del método de sensibilidad. Dado que se van a introducir más variables, que complican la resolución de los modelos con las técnicas de optimización estándar, sólo se transformará el problema original una vez que se haya alcanzado la convergencia, de tal forma que el problema auxiliar con las variables ficticias se resuelve partiendo de la solución óptima, con lo cual la obtención de las sensibilidades está garantizada.

Ejemplo ilustrativo 6.2 (Aplicación del método de sensibilidad al ejemplo computacional 6.1). Considérese el mismo problema que en el ejemplo computacional 6.1

$$\underset{\mathbf{x}}{\text{Minimizar}} \quad c(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \underset{x_1, x_2}{\text{Minimizar}} \quad \left(\frac{x_1}{y_1}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{y_2}\right)^2 \quad (6.58)$$

sujeto a

$$g_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{x_1 x_2}{y_1 y_2} \geq g_1^0 \quad (6.59)$$

$$g_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{x_2}{y_2} \sqrt{\frac{y_1}{x_1}} \geq g_2^0 \quad (6.60)$$

$$\mathbf{h}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \geq \mathbf{h}_0 \quad (6.61)$$

$$(6.62)$$

donde la función $\mathbf{h}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ es la solución del siguiente problema para $i = 1, 2$

$$h_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \underset{u_1, u_2, v_1, v_2}{\text{Mínimo}} \quad \sqrt{\left(\frac{u_1 - x_1}{x_1 v_{x_1}}\right)^2 + \left(\frac{u_2 - x_2}{x_2 v_{x_2}}\right)^2 + \left(\frac{v_1 - y_1}{y_1 v_{y_1}}\right)^2 + \left(\frac{v_2 - y_2}{y_2 v_{y_2}}\right)^2} \quad (6.63)$$

sujeto a

$$g_i(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 1, \quad (6.64)$$

donde

$$g_1(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \frac{u_1 u_2}{v_1 v_2} \quad \text{y} \quad g_2(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \frac{u_2}{v_2} \sqrt{\frac{v_1}{u_1}}.$$

Supóngase que se quiere calcular el mayor número de sensibilidades de los parámetros del modelo, con lo cual se llega a un mayor entendimiento del mismo. Considerando los mismos valores numéricos que en el ejemplo 6.1 y resolviendo el problema mediante la aproximación por hiperplanos plantearíamos los siguientes problemas de sensibilidad en el óptimo \mathbf{x}^* :

Para el clásico:

$$\text{Minimizar}_{\mathbf{x}, \mathbf{y}^{\text{aux}}, \mathbf{cv}^{\text{aux}}} c(\mathbf{x}, \mathbf{y}^{\text{aux}}) = \text{Minimizar}_{x_1, x_2} \left(\frac{x_1}{y_1^{\text{aux}}} \right)^2 + \left(\frac{x_2}{y_2^{\text{aux}}} \right)^2 \quad (6.65)$$

sujeito a

$$g_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}^{\text{aux}}) = \frac{x_1 x_2}{y_1^{\text{aux}} y_2^{\text{aux}}} \geq g_1^0 : \beta_1 \quad (6.66)$$

$$g_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}^{\text{aux}}) = \frac{x_2}{y_2^{\text{aux}}} \sqrt{\frac{y_1^{\text{aux}}}{x_1}} \geq g_2^0 : \beta_2 \quad (6.67)$$

$$\mathbf{h}^{(s)} + \sum_{\forall i} \frac{\partial h_i}{\partial \mathbf{x}^*} (\mathbf{x} - \mathbf{x}^*) + \quad (6.68)$$

$$+ \sum_{\forall i} \frac{\partial h_i}{\partial \mathbf{y}} (\mathbf{y}^{\text{aux}} - \mathbf{y}) + \quad (6.69)$$

$$+ \sum_{\forall i} \frac{\partial h_i}{\partial \mathbf{cv}} (\mathbf{cv}^{\text{aux}} - \mathbf{cv}) \geq \mathbf{h}_0 : \boldsymbol{\theta}; s = 1, 2, \dots, \nu - 1 \quad (6.70)$$

$$\mathbf{cv}^{\text{aux}} = \mathbf{cv} : \boldsymbol{\phi} \quad (6.71)$$

$$\mathbf{y}^{\text{aux}} = \mathbf{y} : \boldsymbol{\psi} \quad (6.72)$$

con lo cual se obtienen las derivadas de la función objetivo del problema original β con respecto a los límites inferiores \mathbf{g}^0 , las derivadas parciales $\boldsymbol{\theta}$ respecto a los límites inferiores \mathbf{h}_0 , las derivadas parciales $\boldsymbol{\psi}$ con respecto a los datos \mathbf{y} y las sensibilidades $\boldsymbol{\phi}$ con respecto a los parámetros $\mathbf{cv} = (v_{x_1}, v_{x_2}, v_{y_1}, v_{y_2})^T$.

Para los subproblemas: $\forall i$:

$$\text{Mínimo}_{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{x}^{\text{aux}}, \mathbf{y}^{\text{aux}}, \mathbf{cv}^{\text{aux}}} \sqrt{\sum_{j=1}^2 \left(\frac{u_j - x_j^{\text{aux}}}{x_j^{\text{aux}} v_{x_j}^{\text{aux}}} \right)^2 + \sum_{j=1}^2 \left(\frac{v_j - y_j^{\text{aux}}}{y_j^{\text{aux}} v_{y_j}^{\text{aux}}} \right)^2} \quad (6.73)$$

sujeito a

$$g_i(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 1 \quad (6.74)$$

$$\mathbf{x}^{\text{aux}} = \mathbf{x}^* : \boldsymbol{\lambda}_i \quad (6.75)$$

$$\mathbf{y}^{\text{aux}} = \mathbf{y} : \boldsymbol{\psi}_i \quad (6.76)$$

$$\mathbf{cv}^{\text{aux}} = \mathbf{cv} : \boldsymbol{\chi}_i \quad (6.77)$$

donde $\boldsymbol{\lambda}_i$, $\boldsymbol{\psi}_i$ y $\boldsymbol{\chi}_i$ son las variables duales asociadas a las restricciones que fijan los valores auxiliares de las variables a los valores fijos de las variables objetivo y de los parámetros, respectivamente. Y que representan las sensibilidades de las funciones \mathbf{h} con respecto a los mismos

$$\boldsymbol{\lambda}_i = \frac{\partial h_i}{\partial \mathbf{x}^*}; \boldsymbol{\psi}_i = \frac{\partial h_i}{\partial \mathbf{y}}; \boldsymbol{\chi}_i = \frac{\partial h_i}{\partial \mathbf{cv}},$$

que se emplean en el clásico en la reproducción del hiperplano tangente a la función \mathbf{h} en el punto óptimo \mathbf{x}^* .

Cuadro 6.4: Sensibilidades del ejemplo ilustrativo 6.2.

Parámetro	$\partial f(\mathbf{x}, \mathbf{y})$	$h_1(\mathbf{x}, \mathbf{y})$	$h_2(\mathbf{x}, \mathbf{y})$
∂x_1	--	8,711	-4,943
∂x_2	--	5,310	6,026
∂y_1	0.000	-8,286	4,701
∂y_2	0.000	-8,286	-9,403
∂v_{x_1}	1.436	-4,203	-1,922
∂v_{x_2}	1.436	-4,203	-8,085
∂v_{y_1}	4.836	-14,159	-19,623
∂v_{y_2}	4.836	-14,159	-22,567
∂q_1^0	0.000	--	--
∂q_2^0	1.275	--	--
∂h_1^0	0.342	--	--
∂h_2^0	0.000	--	--

En la tabla 6.4 se muestran los valores numéricos de las sensibilidades buscadas. Nótese la cantidad de información que proporciona la tabla, así por ejemplo, se puede comprobar que los únicos límites inferiores con sensibilidad distinta de cero son q_2^0 y h_1^0 , lo cual no es de extrañar porque de la solución del ejemplo 6.1 se puede comprobar que son las únicas restricciones activas, y por lo tanto las únicas que pueden influir en la solución con una pequeña perturbación de esos límites.

■

Pese haberse aplicado el estudio de sensibilidad usando la aproximación por hiperplanos, es posible obtener los mismos resultados mediante la resolución por el método de relajación.

Capítulo 7

Aplicación de las Técnicas de Optimización al Cálculo de la Fiabilidad Estructural

7.1. Introducción

En el capítulo 2 se ha revisado el estado del arte de los métodos empleados en fiabilidad, y se ha llegado a la conclusión de que las metodologías más interesantes desde el punto de vista práctico eran las basadas en métodos FORM y SORM. Ambas aproximaciones requieren el cálculo previo del índice de fiabilidad y del punto de máxima verosimilitud, que se reducía a un problema de optimización.

Abdo y Rackwitz [2] y Liu y Der Kiureghian [110] presentaron sendos estudios de análisis del comportamiento de algoritmos de optimización aplicados a la fiabilidad estructural. Der Kiureghian y De Stafeno [59] presentaron un algoritmo basado en el métodos de gradiente que permite calcular el punto de diseño \mathbf{z}^* , el índice de fiabilidad β y además las curvaturas principales, con lo cual la aproximación FORM y SORM es inmediata usando los métodos de la sección 2.8.1. El algoritmo iterativo desarrollado por Rackwitz y Fiessler, véase Madsen, Krend y Lind [114], ha demostrado ser muy rápido y efectivo en el análisis FORM.

En este capítulo, no se van a discutir los diferentes métodos aplicables a problemas de fiabilidad, sino que se propondrá y analizará cómo se puede utilizar cualquiera de los paquetes de optimización estándar existentes en el mercado, para la resolución de problemas de optimización basados en técnicas de optimización, en particular en aquellos en los que el cálculo de la solución del problema (2.12)-(2.13) sea sólo una parte del objetivo del problema.

7.2. Problemas de Optimización Basados en la Fiabilidad

En la sección 2.9 se introdujo el estado del arte de los métodos de optimización aplicados a la optimización estructural. En esta sección se presentarán de forma más concreta los diferentes problemas tratados en esta tesis.

7.2.1. Clasificación de las variables

Antes de comenzar con el planteamiento general del problema vamos a clasificar las distintas variables con las que se va a trabajar, y que inicialmente se engloban en el vector de variables básicas o de proyecto (X_1, X_2, \dots, X_n) que constituyen las variables de diseño y factores de proyecto tales como (resistencias, sobrecargas, dimensiones, ...). Para que el tratamiento sea lo más general posible se considerará que todas las variables que intervienen son aleatorias, mientras que las deterministas serán un caso particular de las anteriores en las que el nivel de incertidumbre asociado es nulo.

Un aspecto muy importante es distinguir entre valores de diseño de las variables aleatorias, que en este caso se consideran como valores esperados o característicos (percentiles extremos) y que se denotan como \bar{x}_i y \tilde{x}_i , respectivamente, y el valor real de la variable. El primero tiene como función tratar de definir el valor seleccionado por el proyectista o por el procedimiento de optimización para utilizar un valor de cálculo asociado (valor nominal), mientras que el segundo es el valor verdadero que toma la variable en realidad, que es aleatorio. Estos valores son seleccionados o bien por el ingeniero, o bien los definen los códigos o bien son resultado del procedimiento de optimización. Así, el conjunto inicial de variables básicas (X_1, \dots, X_n) puede dividirse en cinco subconjuntos:

- d***: *Variables de diseño*. Son las variables cuyos valores deben obtenerse del procedimiento de optimización. Normalmente están asociadas a parámetros que definen la geometría de la estructura (dimensiones), tales como espesores, alturas, secciones transversales, etc, a parámetros que definen la configuración, o a los materiales que la componen, etc. Pueden tener valores deterministas o aleatorios, en caso de tratarse de variables aleatorias se trabajará con su valor nominal, es decir, el esperado o característico ($\bar{\mathbf{d}}$ o $\tilde{\mathbf{d}}$). Está claro, por ejemplo, que las dimensiones de un proyecto, en principio son variables fijadas por el proyectista, pero a la hora de construir hay cierta incertidumbre en su valor final, ésta dependerá del nivel de control, y puede considerarse como aleatoria. Lo mismo ocurre con las resistencias, claramente aleatorias.
- η***: *Parámetros*. Conjunto de parámetros fijo en el diseño global controlados por el proyectista, es decir, los valores esperados o característicos ($\bar{\boldsymbol{\eta}}$ o $\tilde{\boldsymbol{\eta}}$) asociados a estas variables no se modifican por la optimización, pero pueden tener carácter aleatorio que influirá en la fiabilidad.
- φ***: *Agentes*. En este conjunto se englobarán todas las variables aleatorias cuyo valor no depende del proyectista, principalmente engloban este grupo las acciones sobre la estructura, o parámetros experimentales poco conocidos. Los valores esperados o característicos de estas variables se denotan como ($\tilde{\boldsymbol{\phi}}$).
- κ***: *Parámetros estadísticos*. Constituyen el conjunto de parámetros que definen la variabilidad y dependencia de las variables aleatorias de los vectores ***d***, ***η*** y ***φ***.
- ψ***: *Variables auxiliares o no básicas*. Aquellas cuyos valores pueden obtenerse a partir de alguno de los subconjuntos anteriores aplicando alguna fórmula. Están íntimamente ligadas a las variables dependientes, de estado o no básicas del método del gradiente reducido generalizado.

7.2.2. Problemas de optimización estructural con restricciones de fiabilidad

Toda estructura tiene una serie de etapas o periodos característicos, comenzando desde su construcción, vida útil, mantenimiento y reparaciones, desmantelamiento, etc. Cada una de esas fases tiene una determinada duración en la que la estructura y su entorno están sometidos a una serie de factores que interactúan, y que tienen que tenerse en cuenta en la etapa de proyecto. Para simplificar el análisis de las consecuencias de estas acciones se discretiza en intervalos de tiempo caracterizados por unos valores de proyecto. Así, cada estado de proyecto con su comportamiento en el periodo considerado es una realización de los factores de proyecto, es decir, que se asocia a cada estado unos valores fijos de las variables. Esta discretización es una simplificación del proceso estocástico real, de forma que se describe el comportamiento estructural y del entorno mediante valores deterministas y descriptores estadísticos. Durante cada uno de esos periodos, la respuesta estructural y la explotación se asume que son procesos estacionarios.

El conjunto de estados de proyecto puede dividirse en tres subconjuntos, asociados a las condiciones de operatividad normal, extrema o accidental (véase la figura 7.1). Las primeras incluyen las etapas de proyecto que ocurren habitualmente y para las cuales se diseñó la estructura. Las condiciones extremas incluyen etapas de proyecto asociadas con las acciones más severas de los factores de proyecto.

Estados límites. El objetivo del proyecto es verificar que la estructura cumplirá los requerimientos para los que fue diseñada en cada una de las etapas. Para simplificar el proceso de verificación, sólo se comprueban algunos de los posibles estados de proyecto, especialmente los que representan situaciones límite con respecto a la estabilidad, forma, uso y explotación. Por este motivo, se les llama estados límite.

Como se vió en el capítulo 1 hay varios tipos de estados límites que de forma general se pueden dividir en dos: (1) aquellos que afectan la seguridad y servicio de la estructura; y (2) aquellos relacionados con el uso y explotación en los que no ocurre fallo estructural, es decir, una vez que ha cesado el agente que provocó la parada operativa, la estructura recuperará su servicio normal de uso.

Modos de fallo. Un modo de fallo describe la forma o mecanismo en el que puede producirse el fallo o la parada operativa de uno o varios elementos de la estructura. Los modos que ocurren de forma similar o por el mismo mecanismo se les asignará el mismo estado límite estructural u operacional (véase la figura 7.2).

Ecuaciones de verificación. Una ecuación de verificación es la ecuación que define un modo de fallo. Es necesario establecer una ecuación de verificación para cada modo de fallo considerado, ya sea de estado límite último, de servicio y para cada modo de fallo operativo perteneciente a un estado límite operativo. Generalmente se aplica asumiendo que los efectos de los factores de proyecto son estacionarios y uniformes desde un punto de vista estadístico.

Hay varias formas de establecer la ecuación de verificación: (a) mediante coeficientes de seguridad, y (b) mediante el margen de seguridad. Tradicionalmente, la verificación del

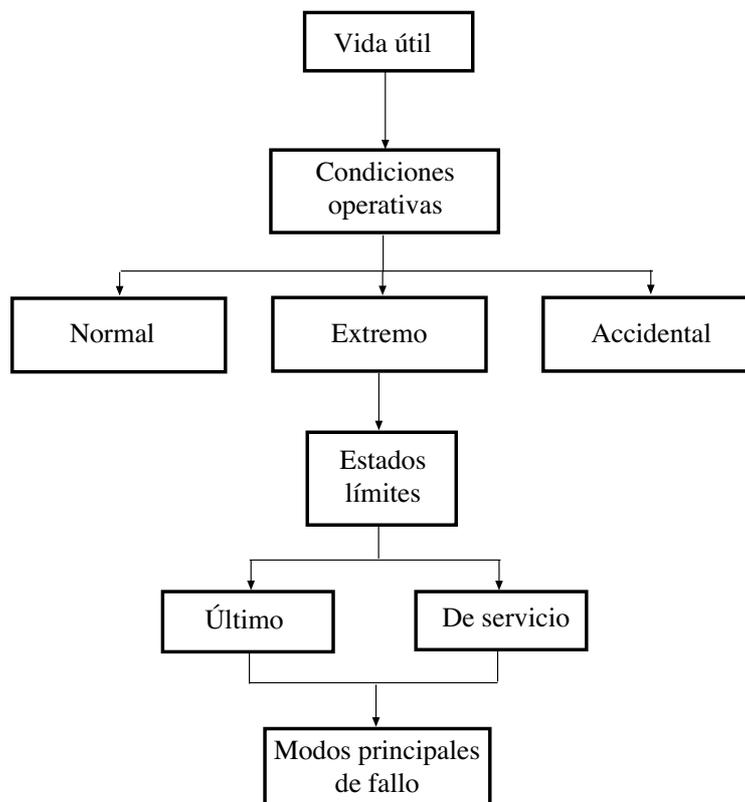


Figura 7.1: Metodología general para plantear el diseño estructural.

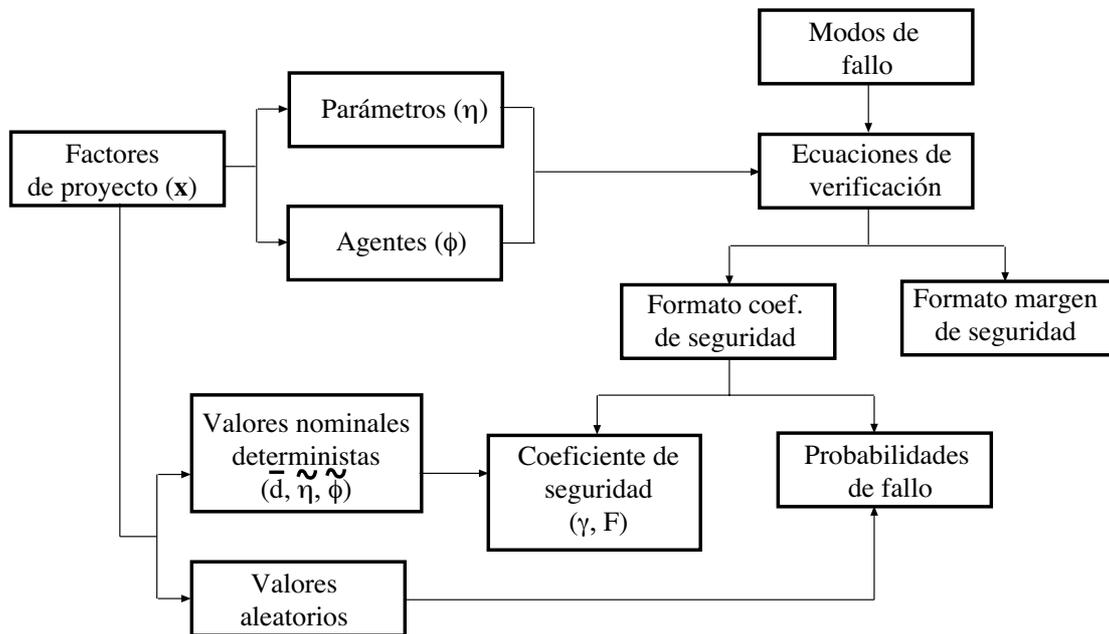


Figura 7.2: Variables, factores, estados de proyecto y modos de evaluación de la fiabilidad.

cumplimiento de los requisitos de seguridad de una estructura en relación a un determinado modo de fallo se efectúa mediante coeficientes de seguridad, globales o parciales.

Factores de diseño deterministas o aleatorios. La magnitud (y dirección) de los factores de proyecto, y consecuentemente, la respuesta de la estructura y su nivel de explotación varía con el tiempo. A los factores de proyecto se les puede asignar un valor nominal (determinista), o un valor basado en un modelo estadístico u otro procedimiento, como experiencia previa, ensayos de laboratorio, etc. Así, durante el proceso de verificación los factores de proyecto pueden tratarse como deterministas u aleatorios.

Diseños óptimos. Pero eso no es todo, sino que en el trabajo diario de los ingenieros tratando de diseñar estructuras tales como puentes, presas, diques, etc, tienen como objetivo minimizar el coste satisfaciendo las restricciones y requerimientos impuestos. El problema de diseñar se convierte por tanto en una tarea complicada e iterativa y usualmente requiere mucha experiencia. Las iteraciones consisten en un proceso de prueba y error, seleccionando las variables de diseño, y comprobando si se cumplen las restricciones asociadas a coeficientes a la seguridad, a ecuaciones de funcionalidad, etc hasta que se obtiene un diseño razonable en términos de coste y seguridad. Para resolver este problema hay dos aproximaciones posibles: (a) la aproximación clásica, basada en coeficientes de seguridad (DSO, ‘Deterministic Structural Optimization’), y (b) la aproximación moderna, basada en probabilidades de fallo (RBSO, ‘Reliability-Based Structural Optimization’).

Un aspecto muy importante antes de describir los distintos problemas tratados en esta tesis es que en la aproximación clásica se utilizan restricciones con coeficientes de seguridad

donde las variables se asumen deterministas (valores nominales) e iguales a sus valores medios o característicos (percentiles extremos).

En esta tesis se analizan de forma exhaustiva problemas en los que las restricciones fijadas por los códigos relativas a la fiabilidad de los componentes estructurales están asociadas a modos de fallo individuales (véase Frangopol [79], Murotsu et al. [123] y Sorensen [152]), e invariantes en el tiempo. Por tanto, se tratan los siguientes casos:

1. **Diseño clásico con coeficientes de seguridad globales.** En este caso, el ingeniero trata de minimizar una función objetivo sometida a restricciones de seguridad con coeficientes globales asociados al modo de fallo (véase la subsección 1.2.1), es decir

$$\text{Minimizar}_{\bar{\mathbf{d}}} \quad c(\bar{\mathbf{d}}, \tilde{\boldsymbol{\eta}}, \tilde{\boldsymbol{\phi}}, \boldsymbol{\psi}) \quad (7.1)$$

sujeto a

$$g_i(\bar{\mathbf{d}}, \tilde{\boldsymbol{\eta}}, \tilde{\boldsymbol{\phi}}, \boldsymbol{\psi}) \geq F_i^0; \forall i \in I \quad (7.2)$$

$$r_j(\bar{\mathbf{d}}, \tilde{\boldsymbol{\eta}}, \tilde{\boldsymbol{\phi}}, \boldsymbol{\psi}) \leq 0; \forall j \in J \quad (7.3)$$

$$\mathbf{h}(\bar{\mathbf{d}}, \tilde{\boldsymbol{\eta}}, \tilde{\boldsymbol{\phi}}) = \boldsymbol{\psi} \quad (7.4)$$

$$\bar{\mathbf{d}}^{\text{lo}} \leq \bar{\mathbf{d}} \leq \bar{\mathbf{d}}^{\text{up}} \quad (7.5)$$

donde $c(\bar{\mathbf{d}}, \tilde{\boldsymbol{\eta}}, \tilde{\boldsymbol{\phi}}, \boldsymbol{\psi})$ es la función objetivo a optimizar (función de coste), I es el conjunto de modos de fallo, $g_i(\bar{\mathbf{d}}, \tilde{\boldsymbol{\eta}}, \tilde{\boldsymbol{\phi}}, \boldsymbol{\psi})$; $i \in I$ son los valores actuales de los coeficientes de seguridad asociados a todos los modos de fallo, respectivamente, $r_j(\bar{\mathbf{d}}, \tilde{\boldsymbol{\eta}}, \tilde{\boldsymbol{\phi}}, \boldsymbol{\psi}) \leq 0$; $j \in J$ son las restricciones geométricas y las asociadas a los códigos, $\mathbf{h}(\bar{\mathbf{d}}, \tilde{\boldsymbol{\eta}}, \tilde{\boldsymbol{\phi}})$ son las restricciones que permiten el cálculo de las variables auxiliares y (7.5) son los límites de las variables de diseño. Nótese que las variables aleatorias tienen como valores representativos los valores medios o característicos $\bar{\mathbf{d}}, \tilde{\boldsymbol{\eta}}, \tilde{\boldsymbol{\phi}}$, que permanecen fijos.

2. **Diseño clásico con coeficientes de seguridad parciales.** Dado que en la mayoría de los códigos existentes las restricciones de seguridad se imponen con coeficientes de seguridad parciales (véase la subsección 1.2.3) asociados a las variables en vez de a los modos de fallo, el problema anterior queda como

$$\text{Minimizar}_{\bar{\mathbf{d}}} \quad c(\bar{\mathbf{d}}, \tilde{\boldsymbol{\eta}}, \tilde{\boldsymbol{\phi}}, \boldsymbol{\psi}) \quad (7.6)$$

sujeto a

$$g_i(\boldsymbol{\gamma}^T(\bar{\mathbf{d}}, \tilde{\boldsymbol{\eta}}, \tilde{\boldsymbol{\phi}}), \boldsymbol{\psi}) \geq 1; \forall i \in I \quad (7.7)$$

$$r_j(\boldsymbol{\gamma}^T(\bar{\mathbf{d}}, \tilde{\boldsymbol{\eta}}, \tilde{\boldsymbol{\phi}}), \boldsymbol{\psi}) \leq 0; \forall j \in J \quad (7.8)$$

$$\mathbf{h}(\boldsymbol{\gamma}^T(\bar{\mathbf{d}}, \tilde{\boldsymbol{\eta}}, \tilde{\boldsymbol{\phi}})) = \boldsymbol{\psi} \quad (7.9)$$

$$\bar{\mathbf{d}}^{\text{lo}} \leq \bar{\mathbf{d}} \leq \bar{\mathbf{d}}^{\text{up}} \quad (7.10)$$

$$\boldsymbol{\gamma}^{\text{lo}} \leq \boldsymbol{\gamma} \leq \boldsymbol{\gamma}^{\text{up}} \quad (7.11)$$

donde $\boldsymbol{\gamma}$ es el vector de coeficientes parciales de seguridad asociados a cada una de las variables aleatorias, sus valores serán mayores o menores que 1 en función de si están del lado de la inseguridad, o del lado de la seguridad, respectivamente.

3. **Diseño moderno.** Alternativamente, el diseño moderno trata de minimizar el coste sometido a restricciones de fiabilidad, es decir

$$\underset{\bar{d}}{\text{Minimizar}} \quad c(\bar{d}, \tilde{\eta}, \tilde{\phi}, \psi) \quad (7.12)$$

sujeto a

$$\beta_i(\bar{d}, \tilde{\eta}, \tilde{\phi}, \psi, \kappa) \geq \beta_i^0; \forall i \in I \quad (7.13)$$

$$r_j(\bar{d}, \tilde{\eta}, \tilde{\phi}, \psi) \leq 0; \forall j \in J \quad (7.14)$$

$$\mathbf{h}(\bar{d}, \tilde{\eta}, \tilde{\phi}) = \psi \quad (7.15)$$

$$\bar{d}^{\text{lo}} \leq \bar{d} \leq \bar{d}^{\text{up}} \quad (7.16)$$

donde β_i es el índice de fiabilidad asociado al modo de fallo i , y β_i^0 es el correspondiente límite inferior. En este modelo se han sustituido las restricciones (7.2) y (7.7) clásicas por las restricciones probabilistas (7.13).

4. **Diseño mixto global.** Existe una alternativa mixta, que combina coeficientes de seguridad e índices de fiabilidad (es la base del ‘Probability-Safety Factor Method’, véase Castillo et al. [37, 31, 26, 38]) y que, en el caso de coeficientes de seguridad globales puede plantearse como:

$$\underset{\bar{d}}{\text{Minimizar}} \quad c(\bar{d}, \tilde{\eta}, \tilde{\phi}, \psi) \quad (7.17)$$

sujeto a

$$g_i(\bar{d}, \tilde{\eta}, \tilde{\phi}, \psi) \geq F_i^0; \forall i \in I \quad (7.18)$$

$$\beta_i(\bar{d}, \tilde{\eta}, \tilde{\phi}, \psi, \kappa) \geq \beta_i^0; \forall i \in I \quad (7.19)$$

$$r_j(\bar{d}, \tilde{\eta}, \tilde{\phi}, \psi) \leq 0; \forall j \in J \quad (7.20)$$

$$\mathbf{h}(\bar{d}, \tilde{\eta}, \tilde{\phi}) = \psi \quad (7.21)$$

$$\bar{d}^{\text{lo}} \leq \bar{d} \leq \bar{d}^{\text{up}} \quad (7.22)$$

que es exactamente igual al problema (7.1)-(7.5) pero añadiendo las restricciones probabilistas (7.19).

5. **Diseño mixto parcial.** En el caso de utilizar coeficientes de seguridad parciales (véase Casas [25]) el problema puede plantearse como:

$$\underset{\bar{d}}{\text{Minimizar}} \quad c(\bar{d}, \tilde{\eta}, \tilde{\phi}, \psi) \quad (7.23)$$

sujeto a

$$g_i(\gamma^T(\bar{d}, \tilde{\eta}, \tilde{\phi}), \psi) \geq 1; \forall i \in I \quad (7.24)$$

$$\beta_i(\bar{d}, \tilde{\eta}, \tilde{\phi}, \psi, \kappa) \geq \beta_i^0; \forall i \in I \quad (7.25)$$

$$r_j(\gamma^T(\bar{d}, \tilde{\eta}, \tilde{\phi}), \psi) \leq 0; \forall j \in J \quad (7.26)$$

$$\mathbf{h}(\gamma^T(\bar{d}, \tilde{\eta}, \tilde{\phi})) = \psi \quad (7.27)$$

$$\bar{d}^{\text{lo}} \leq \bar{d} \leq \bar{d}^{\text{up}} \quad (7.28)$$

$$\gamma^{\text{lo}} \leq \gamma \leq \gamma^{\text{up}} \quad (7.29)$$

que es exactamente igual al problema (7.6)-(7.11) pero añadiendo las restricciones probabilistas (7.25).

6. **Diseño general global.** El problema más general que se tratará en la tesis será el mixto en el que se incluye en la función objetivo el coste asociado a la probabilidad de fallo, este problema en el caso de coeficientes de seguridad globales se plantea de la siguiente manera:

$$\text{Minimizar}_{\bar{\mathbf{d}}} C_{to}(\bar{\mathbf{d}}, \tilde{\boldsymbol{\eta}}, \tilde{\boldsymbol{\phi}}, \boldsymbol{\psi}, \boldsymbol{\kappa}) = C_{co}(\bar{\mathbf{d}}, \tilde{\boldsymbol{\eta}}, \tilde{\boldsymbol{\phi}}, \boldsymbol{\psi}) + C_{\beta}(\bar{\mathbf{d}}, \tilde{\boldsymbol{\eta}}, \tilde{\boldsymbol{\phi}}, \boldsymbol{\psi}, \boldsymbol{\kappa}) \quad (7.30)$$

sujeto a

$$g_i(\bar{\mathbf{d}}, \tilde{\boldsymbol{\eta}}, \tilde{\boldsymbol{\phi}}, \boldsymbol{\psi}) \geq F_i^0; \forall i \in I \quad (7.31)$$

$$\beta_i(\bar{\mathbf{d}}, \tilde{\boldsymbol{\eta}}, \tilde{\boldsymbol{\phi}}, \boldsymbol{\psi}, \boldsymbol{\kappa}) \geq \beta_i^0; \forall i \in I \quad (7.32)$$

$$r_j(\bar{\mathbf{d}}, \tilde{\boldsymbol{\eta}}, \tilde{\boldsymbol{\phi}}, \boldsymbol{\psi}) \leq 0; \forall j \in J \quad (7.33)$$

$$\mathbf{h}(\bar{\mathbf{d}}, \tilde{\boldsymbol{\eta}}, \tilde{\boldsymbol{\phi}}) = \boldsymbol{\psi} \quad (7.34)$$

$$\bar{\mathbf{d}}^{\text{lo}} \leq \bar{\mathbf{d}} \leq \bar{\mathbf{d}}^{\text{up}} \quad (7.35)$$

donde C_{to} es el coste total en la vida útil de la obra, C_{co} es el coste inicial de construcción y C_{β} es el coste asociado a la probabilidad de fallo.

7. **Diseño general parcial.** En el caso de emplear coeficientes de seguridad parciales se plantea de la siguiente manera:

$$\text{Minimizar}_{\bar{\mathbf{d}}} C_{to}(\bar{\mathbf{d}}, \tilde{\boldsymbol{\eta}}, \tilde{\boldsymbol{\phi}}, \boldsymbol{\psi}, \boldsymbol{\kappa}) = C_{co}(\bar{\mathbf{d}}, \tilde{\boldsymbol{\eta}}, \tilde{\boldsymbol{\phi}}, \boldsymbol{\psi}) + C_{\beta}(\bar{\mathbf{d}}, \tilde{\boldsymbol{\eta}}, \tilde{\boldsymbol{\phi}}, \boldsymbol{\psi}, \boldsymbol{\kappa}) \quad (7.36)$$

sujeto a

$$g_i(\boldsymbol{\gamma}^T(\bar{\mathbf{d}}, \tilde{\boldsymbol{\eta}}, \tilde{\boldsymbol{\phi}}), \boldsymbol{\psi}) \geq 1; \forall i \in I \quad (7.37)$$

$$\beta_i(\bar{\mathbf{d}}, \tilde{\boldsymbol{\eta}}, \tilde{\boldsymbol{\phi}}, \boldsymbol{\psi}, \boldsymbol{\kappa}) \geq \beta_i^0; \forall i \in I \quad (7.38)$$

$$r_j(\boldsymbol{\gamma}^T(\bar{\mathbf{d}}, \tilde{\boldsymbol{\eta}}, \tilde{\boldsymbol{\phi}}), \boldsymbol{\psi}) \leq 0; \forall j \in J \quad (7.39)$$

$$\mathbf{h}(\boldsymbol{\gamma}^T(\bar{\mathbf{d}}, \tilde{\boldsymbol{\eta}}, \tilde{\boldsymbol{\phi}})) = \boldsymbol{\psi} \quad (7.40)$$

$$\bar{\mathbf{d}}^{\text{lo}} \leq \bar{\mathbf{d}} \leq \bar{\mathbf{d}}^{\text{up}} \quad (7.41)$$

$$\boldsymbol{\gamma}^{\text{lo}} \leq \boldsymbol{\gamma} \leq \boldsymbol{\gamma}^{\text{up}} \quad (7.42)$$

donde C_{to} es el coste total en la vida útil de la obra, C_{co} es el coste inicial de construcción y C_{β} es el coste asociado a la probabilidad de fallo.

Nótese que los dos últimos modelos son los más generales, de tal forma que los demás pueden obtenerse como casos particulares. Así por ejemplo, el modelo 1 (diseño clásico con coeficientes de seguridad globales) puede obtenerse del modelo general 6, sin más que quitar la restricción (7.32) y eliminando el coste asociado a la probabilidad de fallo.

Desafortunadamente, las alternativas en las que se tienen restricciones o funciones de coste asociadas a los índices de fiabilidad β no pueden resolverse directamente mediante

procedimientos estándar; las restricciones (7.13), (7.19), (7.25), (7.32) y (7.38) implican otros problema de optimización asociados a cada modo de fallo:

$$\beta_i(\bar{\mathbf{d}}, \tilde{\boldsymbol{\eta}}, \tilde{\boldsymbol{\phi}}, \boldsymbol{\psi}, \boldsymbol{\kappa}) = \underset{\mathbf{d}, \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\phi}}{\text{Minimo}} \beta_i(\mathbf{d}, \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\phi}, \bar{\mathbf{d}}, \tilde{\boldsymbol{\eta}}, \tilde{\boldsymbol{\phi}}, \boldsymbol{\psi}, \boldsymbol{\kappa}) \quad (7.43)$$

sujeto a

$$g_i(\mathbf{d}, \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{\psi}) = 1 \quad (7.44)$$

$$\mathbf{h}(\mathbf{d}, \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\phi}) = \boldsymbol{\psi} \quad (7.45)$$

Sustituyendo el valor de la función $\beta_i(\mathbf{d}, \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\phi}, \bar{\mathbf{d}}, \tilde{\boldsymbol{\eta}}, \tilde{\boldsymbol{\phi}}, \boldsymbol{\psi}, \boldsymbol{\kappa})$ por el dado por la ecuación (2.12) particularizada para este caso, el problema (7.43)-(7.45) se transforma en:

$$\beta_i = \underset{\mathbf{z}}{\text{Minimo}} \sqrt{\mathbf{z}^T \mathbf{z}} \quad (7.46)$$

sujeto a

$$g_i(\mathbf{d}, \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{\psi}) = 1 \quad (7.47)$$

$$\mathbf{h}(\mathbf{d}, \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\phi}) = \boldsymbol{\psi} \quad (7.48)$$

$$\mathbf{T}(\mathbf{d}, \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{\kappa}) = \mathbf{z} \quad (7.49)$$

donde $g_i(\mathbf{d}, \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{\psi}) = 1$ es la ecuación de estado límite en fallo estricto, que es la misma independientemente de utilizar un modelo con coeficientes de seguridad globales o parciales (invarianza del índice de fiabilidad β). Y donde (7.49) es la transformación de Rosenblatt (2.59) para pasar todas las variables aleatorias al espacio multinormal estándar \mathbf{Z} . Nótese que las variables $\mathbf{d}, \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\phi}$ son las realizaciones de las variables aleatorias correspondientes, y que el punto óptimo $\bar{\mathbf{d}}^*, \tilde{\boldsymbol{\eta}}^*, \tilde{\boldsymbol{\phi}}^*$ es el punto de diseño o máxima verosimilitud de cada modo de fallo considerado.

Queda claro, por tanto, que los problemas de optimización basados en fiabilidad se caracterizan por tener dos niveles bien diferenciados:

Nivel 1: Optimización global en las variables \mathbf{d} (problema maestro).

Nivel 2: Estimación de la fiabilidad asociada a cada modo de fallo mediante la resolución del problema (7.46)-(7.49) (subproblemas).

En los capítulos 4 y 6 se presentaron métodos de descomposición para la resolución de todos los problemas planteados anteriormente.

7.3. Aplicación de la descomposición de Benders. Optimización probabilista de un dique de escollera

En este capítulo se han presentado una serie de problemas de optimización basados en la fiabilidad estructural (RBSO). Todos los problemas en los que la función de coste tenga

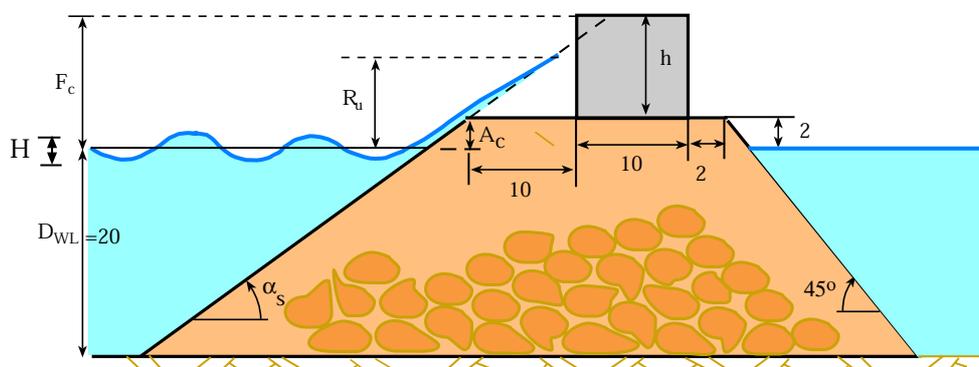


Figura 7.3: Parametrización del dique de escollera usado en el ejemplo.

un término asociado a la fiabilidad (modelo general global y general parcial) se pueden resolver mediante la descomposición de Benders. Para mostrarlo, se va a resolver un ejemplo basado en el modelo general global (7.30)-(7.35) pero quitando las restricciones asociadas a los índices de fiabilidad (7.32) y las relativas a los coeficientes de seguridad (7.31). Posteriormente se presentarán metodologías para tratar las restricciones que se han eliminado, especialmente las de complicación (7.32).

Considérese un ejemplo similar al de la sección 2.7.3 (véase la figura 7.3). El objetivo en este caso es tratar de obtener un diseño que trate de minimizar el coste total de la obra. Éste estará compuesto por el coste inicial de construcción más un coste asociado a la probabilidad de fallo, que se suponfrá que es el coste de un seguro que cubra los daños en las instalaciones y barcos en el puerto en caso de que se produzca rebase.

El coste de construcción es

$$C_{co} = c_c v_c + c_a v_a$$

donde v_c y v_a son los volúmenes de hormigón del espaldón y de escollera, respectivamente, y c_c y c_a son sus respectivos costes por unidad de volumen.

Con el fin de simplificar el problema, el coste del seguro se evalúa sólo considerando los daños en caso de rebase y depende, por tanto de la probabilidad de rebase, P_f^D , durante la vida útil de la obra, D . Aunque para un análisis más riguroso, no sólo se debería considerar la probabilidad de rebase, sino también la cantidad de agua que rebase el dique. Así, una función de coste posible es

$$C_{in} = 5000 + 1,25 \times 10^6 P_f^D{}^2.$$

que asocia un coste de seguro mínimo de 5000 euro, aumentando de forma cuadrática con la probabilidad de fallo.

Los costes de construcción, seguro y total en función de la probabilidad de fallo se muestran en la figura 7.4. Nótese el carácter decreciente y creciente del coste de construcción y de seguro, respectivamente conforme aumenta la probabilidad de fallo, y el carácter convexo de la función de coste total.

Como en el ejemplo de la sección 2.7.3, para un dique de escollera de pendiente de talud $\tan \alpha_s$ y francobordo F_c (véase la figura 7.3), y unos valores dados de la altura H y del

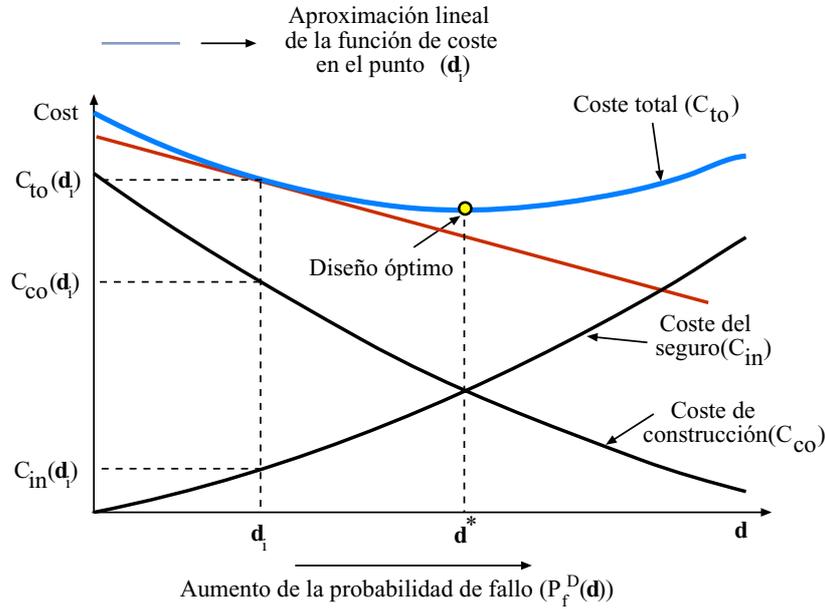


Figura 7.4: Ilustración gráfica de las funciones de coste.

periodo T de la ola, el nivel máximo que alcanza el agua al incidir contra el dique puede estimarse por el nivel que alcanzaría el agua al ascender por el talud del dique, supuesto que tiene una longitud infinita. Con esta aproximación, se producirá rebase (fallo) siempre que el máximo nivel alcanzado por el agua en ese talud, R_u , llamado 'run-up', exceda el francobordo F_c . Así, el fallo por rebase ocurre cuando

$$F_c - R_u < 0. \quad (7.50)$$

Basándose en resultados experimentales, Losada y Jiménez Curto propusieron la siguiente fórmula para estimar la cantidad adimensional R_u/H :

$$\frac{R_u}{H} = A_u (1 - e^{B_u I_r})$$

donde A_u y B_u son coeficientes experimentales dependientes del tipo de material de la escollera e I_r es el número de Iribarren

$$I_r = \frac{\tan \alpha_s}{\sqrt{H/L}}$$

donde L es la longitud de onda de la ola y α_s es el ángulo de la pendiente del talud. L se obtiene de la ecuación de la dispersión

$$\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 = \frac{2\pi}{L} \tanh \frac{2\pi}{D_{WL}}$$

donde D_{WL} es el nivel del mar de diseño.

Además, debido a motivos constructivos, se limita la pendiente del talud α_s por:

$$2 \leq \cot \alpha_s \leq 5$$

Si P_f es la probabilidad de fallo por rebase debido a una ola, la probabilidad de fallo en el estado de mar de cálculo, que será la probabilidad de fallo durante la vida útil es

$$P_f^D(\mathbf{d}) = 1 - (1 - P_f(\mathbf{d}))^N \quad (7.51)$$

donde $N = d_{st}/\bar{T}$ es el número medio de olas (supuestas independientes) durante el estado de mar de diseño para el periodo D , y d_{st} es su duración.

El conjunto de variables de este problema se divide, según la clasificación dada en la sección 7.2.1, en los siguientes subconjuntos:

d: *Variables de diseño.* Variables, en este caso deterministas a determinar por el procedimiento de optimización:

$$\mathbf{d} = \{F_c, \tan \alpha_s\}$$

η : *Parámetros.* Conjunto de variables fijado por el proyectista, los códigos, u otro condicionante ajeno al procedimiento de optimización, en este caso también se han considerado como deterministas para simplificar el problema:

$$\boldsymbol{\eta} = \{A_u, B_u, D_{wl}, c_c, c_a\}$$

ϕ : *Agentes.* Variables aleatorias no controladas por el proyectista, en este caso asociadas al oleaje

$$\boldsymbol{\phi} = \{H, T\}$$

κ : *Parámetros estadísticos.* Definen la variabilidad y dependencia de las variables aleatorias, en este caso los descriptores del estado de mar de cálculo:

$$\boldsymbol{\kappa} = \{H_s, \bar{T}, d_{st}\}$$

donde H_s es la altura de ola significativa, \bar{T} es el periodo medio de las olas y d_{st} es la duración del estado de mar.

ψ : *Variables auxiliares o no básicas.* Son aquellas que pueden obtenerse en función de las demás (\mathbf{d} , $\boldsymbol{\eta}$ y $\boldsymbol{\phi}$), mediante alguna fórmula y sirven para simplificar el modelado y facilitar la obtención de las ecuaciones de estado límite:

$$\boldsymbol{\psi} = \{I_r, v_a, v_c, C_{co}, C_{in}, R_u, L, d\}$$

Las únicas variables aleatorias consideradas en este problema son H y T , que se asume que son independientes con las siguientes funciones de distribución:

$$F_H(H) = 1 - e^{-2(H/H_s)^2}; \quad H \geq 0, \quad (7.52)$$

y

$$F_T(T) = 1 - e^{-0,675(T/\bar{T})^4}; \quad T \geq 0. \quad (7.53)$$

Así, el problema global es:

$$\begin{array}{l} \text{Minimizar} \\ F_c, \tan \alpha_s \end{array} C_{to} = c_c v_c + c_a v_a + 5000 + 1,25 \times 10^6 P_f^{D^2}$$

sujeito a

$$\begin{aligned} 2 &\leq \cot \alpha_s \leq 5 \\ F_c &= 2 + h \\ v_c &= 10h \\ v_a &= \frac{1}{2}(D_{WL} + 2)(46 + D_{WL} + \frac{(D_{WL} + 2)}{\tan \alpha_s}) \\ P_f(\mathbf{d}) &= \Phi(-\beta) \\ P_f^D(\mathbf{d}) &= 1 - (1 - P_f(\mathbf{d}))^{(d_{st}/\bar{T})} \end{aligned}$$

donde β es el índice de fiabilidad, que no puede resolverse directamente, sino que involucra otro problema de optimización

$$\begin{array}{l} \text{Minimizar} \\ H, T \end{array} \beta = \sqrt{z_1^2 + z_2^2}$$

sujeito a

$$\begin{aligned} \frac{R_u}{H} &= A_u (1 - e^{B_u I_r}) \\ I_r &= \frac{\tan \alpha_s}{\sqrt{H/L}} \\ \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 &= \frac{2\pi}{L} \tanh \frac{2\pi}{D_{WL}} \\ \Phi(z_1) &= 1 - \exp(-2(H/H_s)^2) \\ \Phi(z_2) &= 1 - \exp(-0,675(T/\bar{T})^4) \\ F_c &= R_u \end{aligned}$$

Como se puede apreciar, este problema se caracteriza por tener dos niveles, el primero es la optimización global del problema en función de las variables de diseño \mathbf{d} , y el segundo es la determinación de la probabilidad de fallo o fiabilidad. Por eso se precisa una técnica especial de resolución.

A continuación se va a resolver el problema mediante la descomposición de Benders teniendo en cuenta que las variables de complicación van a ser las variables de diseño \mathbf{d} , de tal forma que se va a tratar de recomponer la función $C_{to}(\mathbf{d})$. De forma más precisa el método procedería de la siguiente manera:

Paso 0: Iniciación. Seleccionar unos valores iniciales para las variables de diseño (complicación) $\mathbf{d}^{(0)} = \{F_c^{(0)}, \tan \alpha_s^{(0)}\}$.

Iniciar el contador de iteraciones a $\nu = 1$, $\mathbf{d}^{(\nu)} = \mathbf{d}^{(0)}$, y la cota inferior del óptimo del coste total a $C_{lo}^{(\nu)} = -\infty$.

Paso 1. Resolución del subproblema. *Evaluación del índice de fiabilidad β .* En función de las variables de diseño seleccionadas, se calcula en índice de fiabilidad resolviendo el problema

$$\underset{H, T}{\text{Minimizar}} \quad \beta^{(\nu)} = \sqrt{z_1^2 + z_2^2}$$

sujeeto a

$$\begin{aligned} \frac{R_u}{H} &= A_u (1 - e^{B_u I_r}) \\ I_r &= \frac{\tan \alpha_s}{\sqrt{H/L}} \\ \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 &= \frac{2\pi}{L} \tanh \frac{2\pi}{D_{WL}} \\ \Phi(z_1) &= 1 - \exp(-2(H/H_s)^2) \\ \Phi(z_2) &= 1 - \exp(-0,675(T/\bar{T})^4) \\ R_u &= F_c \\ \mathbf{d} &= \mathbf{d}^{(\nu)} : \boldsymbol{\lambda}^{(\nu)}. \end{aligned}$$

La solución de este problema proporciona $\beta^{(\nu)}$, y las derivadas parciales del índice de fiabilidad con respecto a las variables de diseño o complicación $\boldsymbol{\lambda}^{(\nu)}$. Ahora, es posible evaluar la probabilidad de fallo de una ola (P_f), la probabilidad de fallo durante la vida útil (P_f^D), los volúmenes de material (v_c , v_a), el coste de construcción C_{co} , el coste de seguro C_{in} , y el coste total $C_{to}^{(\nu)}$ (véase la figura 7.5) para los valores actuales de las variables de complicación (diseño) $\mathbf{d}^{(\nu)}$ como:

$$\begin{aligned} v_c &= 10h \\ v_a &= \frac{1}{2}(D_{WL} + 2)(46 + D_{WL} + \frac{(D_{WL} + 2)}{\tan \alpha_s^{(\nu)}}) \\ F_c^{(\nu)} &= 2 + h \\ P_f &= \Phi(-\beta^{(\nu)}) \\ P_f^D &= 1 - (1 - P_f)^{d_{st}/\bar{T}} \\ C_{co} &= c_c v_c + c_a v_a \\ C_{in} &= 5000 + 1,25 \times 10^6 P_f^D \\ C_{to}^{(\nu)} &= C_{co} + C_{in}. \end{aligned}$$

Así, se ha reconstruido el término de orden cero del desarrollo en serie de Taylor de la función objetivo en el punto $\mathbf{d}^{(\nu)}$, es decir, se ha calculado el punto de la función de coste total. Como el problema maestro de la descomposición de Benders trata de reconstruir la función por hiperplanos, se necesita el término de orden 1, es decir, las derivadas parciales de la función de coste total con respecto a las variables de

complicación en el punto $\mathbf{d}^{(\nu)}$, $\Omega^{(\nu)}$ mostradas en la figura 7.5. Pueden calcularse mediante la siguiente expresión:

$$\Omega^{(\nu)} = \frac{\partial C_{to}^{(\nu)}}{\partial \mathbf{d}^{(\nu)}} = \frac{\partial C_{co}}{\partial \mathbf{d}^{(\nu)}} + \frac{\partial C_{in}}{\partial \mathbf{d}^{(\nu)}}$$

donde $\frac{\partial C_{co}}{\partial \mathbf{d}^{(\nu)}}$ es la derivada parcial del coste de construcción, dada analíticamente o que puede calcularse usando un problema de optimización auxiliar que sería otro subproblema:

$$\begin{aligned} &\text{Minimizar } C_{co} = v_c + v_a \\ &F_c, \tan \alpha \end{aligned}$$

sujeto a

$$\begin{aligned} v_c &= 10h \\ v_a &= \frac{1}{2}(D_{WL} + 2)(46 + D_{WL} + \frac{D_{WL} + 2}{\tan \alpha_s}) \\ F_c &= 2 + h \\ \mathbf{d} &= \mathbf{d}^{(\nu)} : \boldsymbol{\theta}^{(\nu)} \end{aligned}$$

donde $\boldsymbol{\theta}^{(\nu)}$ son las derivadas requeridas.

La derivada parcial del coste del seguro se obtiene de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \frac{\partial C_{in}}{\partial \mathbf{d}^{(\nu)}} &= \frac{\partial C_{in}}{\partial P_f^D} \frac{\partial P_f^D}{\partial \mathbf{d}^{(\nu)}} = \\ &= -\frac{\partial C_{in}}{\partial P_f^D} \frac{d_{st}}{\bar{T}} (1 - P_f)^{(d_{st}/\bar{T}-1)} \frac{\partial P_f}{\partial \mathbf{d}^{(\nu)}} = \\ &= \frac{\partial C_{in}}{\partial P_f^D} \frac{d_{st}}{\bar{T}} (1 - P_f)^{(d_{st}/\bar{T}-1)} \frac{\exp(-\beta^{(\nu)^2}/2)}{\sqrt{2\pi}} \frac{\partial \beta^{(\nu)}}{\partial \mathbf{d}^{(\nu)}} \end{aligned}$$

donde para este ejemplo

$$\frac{\partial C_{in}}{\partial P_f^D} = 2,5 \times 10^6 P_f^D, \text{ y } \frac{\partial \beta^{(\nu)}}{\partial \mathbf{d}^{(\nu)}} = \boldsymbol{\lambda}^{(\nu)}.$$

Actualización del límite superior del valor óptimo del coste a $C_{up}^{(\nu)} = C_{to}^{(\nu)}$.

Paso 2. Comprobación de la convergencia. Si $|C_{up}^{(\nu)} - C_{lo}^{(\nu)}|/|C_{up}^{(\nu)}| \leq \varepsilon$, la solución del problema con una tolerancia ε es

$$C_{to}^* = C_{to}^{(\nu)}; \quad \mathbf{d}^* = \mathbf{d}^{(\nu)}.$$

En otro caso, hacer $\nu \leftarrow \nu + 1$ e ir al paso 3.

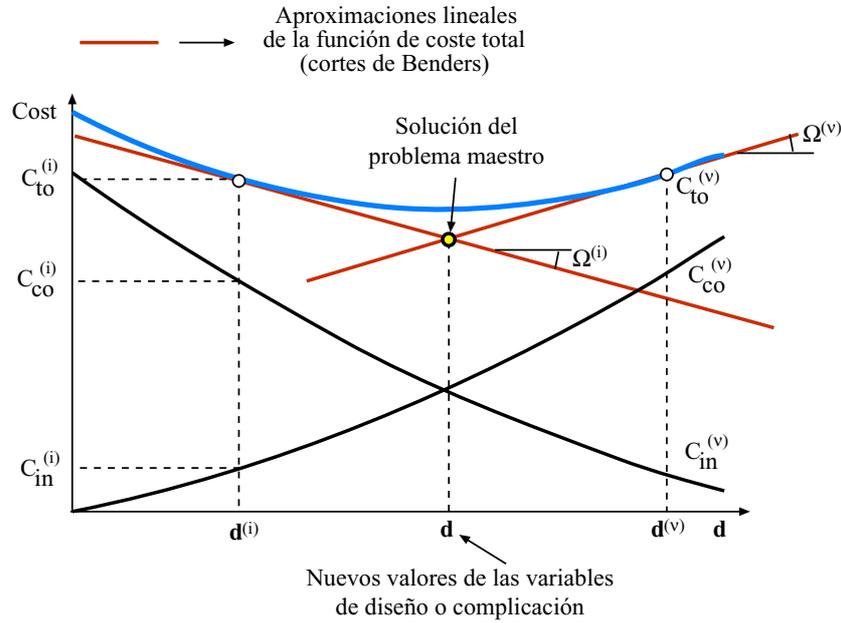


Figura 7.5: Ilustración gráfica de la reconstrucción de la función de coste total mediante cortes de Benders.

Paso 3. Resolución del problema maestro. La reconstrucción por hiperplanos de la función de coste total se usa para calcular los nuevos valores de las variables de complicación o diseño

$$\text{Minimizar } \alpha_{cost}$$

$$\alpha_{cost}, \mathbf{d}$$

sujeto a

$$\alpha_{cost} \geq C_{to}^{(j)} + \sum_{i=1}^n \Omega_i^{(j)} (d_i - d_i^{(j)}); \quad \forall j = 1, \dots, \nu - 1$$

$$2 \leq \frac{1}{\tan \alpha} \leq 5$$

$$\alpha_{cost} \geq 5000$$

La solución de este problema maestro da los valores de las variables de diseño $\mathbf{d}^{(\nu)}$ para la iteración ν . Actualizar el límite inferior del óptimo de la función de coste total $C_{lo}^{(\nu)} = \alpha_{cost}$ e ir al paso 1.

Como se ha demostrado, la resolución de problemas asociados a la fiabilidad puede llevarse a cabo fácilmente mediante la descomposición de Benders.

En el apéndice A.3 se describe el código GAMS en el que se implementa la resolución del problema del dique de escollera mediante este método.

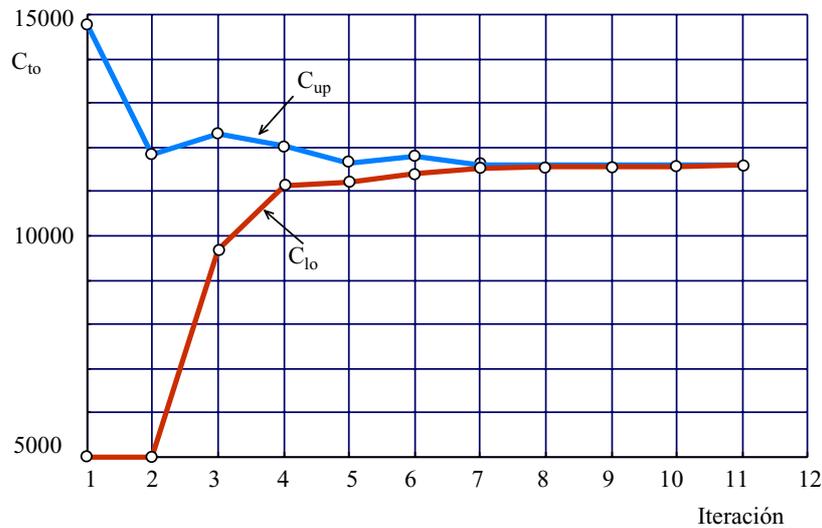


Figura 7.6: Evolución de las cotas inferior y superior del valor óptimo del coste total para el ejemplo del dique de escollera.

7.3.1. Ejemplo numérico

Para realizar el cálculo para un dique de escollera concreto, se han asumido los siguientes valores para las variables que intervienen:

$$D_{wl} = 20 \text{ m}; A_u = 1,05; B_u = -0,67; c_c = 60 \text{ euro/m}^3;$$

$$c_a = 2,4 \text{ euro/m}^3; H_s = 5 \text{ m}; \bar{T} = 10 \text{ s}; d_{st} = 1 \text{ h}.$$

La solución de este problema mediante el método descrito anteriormente es $F_c = 5,88$, $\tan \alpha_s = 0,23$, $C_{co} = 6571,3$, $C_{in} = 5019,8$ y $C_{to} = 11591,1$. En la tabla 7.1 se muestra la evolución de los valores de las variables. La convergencia del método se alcanza tras 11 iteraciones. En la figura 7.6 se muestra la evolución de los límites del valor óptimo de la función objetivo durante el proceso.

7.4. Método combinado de probabilidades de fallo y coeficientes de seguridad. Optimización probabilista de un muro.

En el capítulo 4, se ha presentado varios métodos especialmente diseñados para la resolución de problemas especiales considerados como de restricciones de complicación. Si se presta atención al problema genérico (6.1)-(6.4) y se compara con los distintos modelos relativos a optimización estructural basada en fiabilidad (RBSO), se da uno cuenta de que tienen la misma estructura, y por tanto serán adecuados para resolver todos los problemas en los que se incluyan las restricciones de complicación.

Cuadro 7.1: Ilustración del procedimiento iterativo.

ν	F_c	$\tan \alpha_s$	C_{co}	C_{in}	C_{to}	C_{lo}	C_{up}	error
1	7.00	0.33	6484.8	8297.8	14782.6	5000.0	14782.6	1.9565
2	5.65	0.20	6836.4	5000.0	11836.4	5000.0	11836.4	1.3673
3	9.32	0.50	7296.0	5000.0	12296.0	9682.5	12296.0	0.2699
4	6.52	0.29	6489.7	5542.8	12032.5	11116.5	12032.5	0.0824
5	6.66	0.29	6571.1	5077.2	11648.3	11197.9	11648.3	0.0402
6	7.02	0.29	6786.8	5000.0	11786.8	11413.5	11786.8	0.0327
7	5.98	0.24	6598.6	5007.5	11606.1	11521.9	11606.1	0.0073
8	6.40	0.26	6583.4	5021.2	11604.5	11570.4	11604.5	0.0030
9	6.00	0.24	6553.6	5033.9	11587.5	11571.8	11587.5	0.0014
10	5.67	0.22	6578.7	5020.4	11599.1	11584.6	11599.1	0.0013
11	5.88	0.23	6571.3	5019.8	11591.1	11585.8	11591.1	0.0005

La analogía entre ambos es clara, así para el diseño mixto parcial se establecen las siguientes correspondencias:

$$c(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \iff c(\bar{\mathbf{d}}, \tilde{\boldsymbol{\eta}}, \tilde{\boldsymbol{\phi}}, \boldsymbol{\psi}) \quad (7.54)$$

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq \mathbf{0} \iff g_i(\boldsymbol{\gamma}^T(\bar{\mathbf{d}}, \tilde{\boldsymbol{\eta}}, \tilde{\boldsymbol{\phi}}), \boldsymbol{\psi}) \geq 1; \forall i \in I \quad (7.55)$$

$$\mathbf{h}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{h}_0 \iff \beta_i(\bar{\mathbf{d}}, \tilde{\boldsymbol{\eta}}, \tilde{\boldsymbol{\phi}}, \boldsymbol{\psi}, \boldsymbol{\kappa}) \geq \beta_i^0; \forall i \in I \quad (7.56)$$

$$\mathbf{x}^{lo} \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{x}^{up} \iff \bar{\mathbf{d}}^{lo} \leq \bar{\mathbf{d}} \leq \bar{\mathbf{d}}^{up} \quad (7.57)$$

Análogamente se haría con los demás problemas.

Nótese que los modelos mixtos propuestos (7.17)-(7.22) y (7.23)-(7.29), nunca antes se habían utilizado para el diseño de obras concretas, aunque sí se emplean en cierta forma en la calibración de códigos. Pues bien, estos modelos van a ser la base del método combinado de probabilidades de fallo y coeficientes de seguridad ('Probability-Safety Factor Method' PSFM), cuyo fundamento es la utilización de un doble control de la seguridad mediante las dos metodologías existentes (véase Castillo et al. [37, 31, 26, 38]), de tal forma que pueda hacerse un calibrado particular de cada diseño. Las metodologías de resolución del modelo son las estudiadas en las subsecciones anteriores.

Para ilustrar estos conceptos y comprobar cómo se aplica y resuelve el método combinado, considérese el muro de la figura 7.7, donde a y b son el ancho y la altura, W es su peso por unidad de longitud, T es la fuerza horizontal actuando en el lado derecho, H es la distancia de aplicación de la fuerza con respecto al terreno, γ es el peso específico del material del muro, σ_{max} es la máxima tensión ejercida en el terreno supuesta homogénea y ν es el coeficiente de rozamiento entre el terreno y el muro.

En este ejemplo se va a asumir que las variables aleatorias son a, b, ν, T, γ, H y S , que además se considerarán independientes con funciones de distribución normales. Se dividirán, según la clasificación de la sección 7.2.1, en los siguientes subconjuntos:

d: *Variables de diseño.* Variables, en este caso aleatorias, a determinar por el procedi-

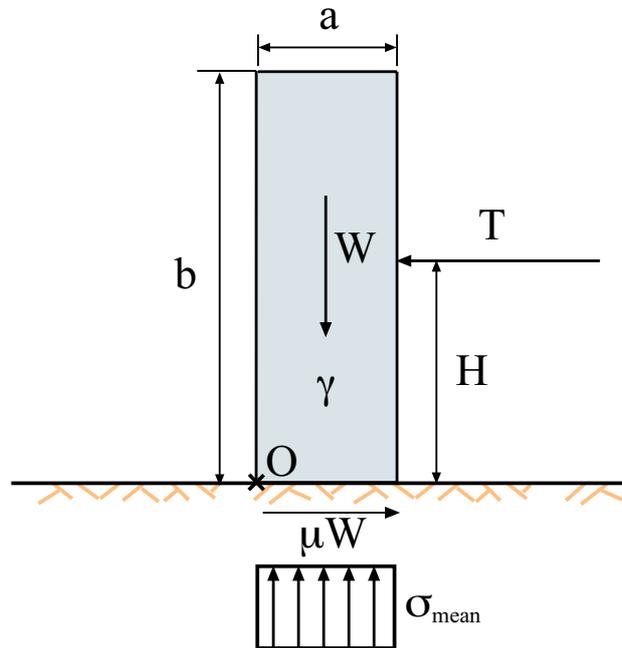


Figura 7.7: Muro y fuerzas actuantes.

miento de optimización:

$$\mathbf{d} = \{a, b\}$$

η : *Parámetros*. Conjunto de variables fijado por el proyectista, los códigos, u otro condicionante ajeno al procedimiento de optimización, en este caso también se han considerado aleatorias:

$$\eta = \{\gamma\}$$

ϕ : *Agentes*. Variables aleatorias no controladas por el proyectista

$$\eta = \{\nu, T, H, S\}$$

κ : *Parámetros estadísticos*. Definen la variabilidad y dependencia de las variables aleatorias, en este caso:

$$\kappa = \{\sigma_a, \sigma_b, \sigma_\nu, \sigma_T, \sigma_\gamma, \sigma_H, \sigma_S\}$$

donde σ es la desviación típica de las variables normales consideradas.

ψ : *Variables auxiliares o no básicas*. Son aquellas que pueden obtenerse en función de las demás (\mathbf{d} , η y ϕ) mediante alguna fórmula y sirven para simplificar el modelado:

$$\psi = \{W, \sigma_{mean}\}$$

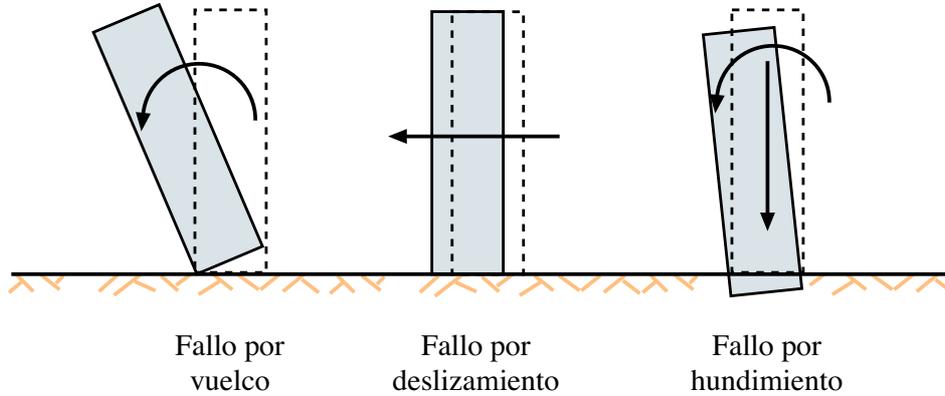


Figura 7.8: Ilustración de los tres modos de fallo considerados para el ejemplo del muro.

Los valores medios o más probables correspondientes a \mathbf{d} , y los medios o característicos correspondientes a $\boldsymbol{\eta}$ y $\boldsymbol{\phi}$ se denominarán $\bar{\mathbf{d}}$, $\tilde{\boldsymbol{\eta}}$ y $\tilde{\boldsymbol{\phi}}$, respectivamente.

Asumiremos los siguientes modos de fallo (véase la figura 7.8):

1. *Fallo por vuelco.* El coeficiente de seguridad al vuelco F_o se define como el ratio entre los momentos estabilizadores y volcadores respecto de algún punto de referencia (O en la figura 7.7), como

$$F_o = g_o(\bar{\mathbf{d}}, \tilde{\boldsymbol{\eta}}, \tilde{\boldsymbol{\phi}}, \boldsymbol{\psi}) = \frac{\text{momentos estabilizadores}}{\text{momentos volcadores}} = \frac{W\bar{a}/2}{\tilde{H}\tilde{T}} = \frac{\bar{a}^2\tilde{b}\tilde{\gamma}}{2\tilde{H}\tilde{T}} \geq F_o^0 \quad (7.58)$$

donde F_o^0 es el correspondiente límite inferior del coeficiente de seguridad.

2. *Fallo por deslizamiento.* El coeficiente de seguridad al vuelco F_s se define como el ratio entre las fuerzas horizontales estabilizadoras y desestabilizadoras como

$$F_s = g_s(\bar{\mathbf{d}}, \tilde{\boldsymbol{\eta}}, \tilde{\boldsymbol{\phi}}, \boldsymbol{\psi}) = \frac{\text{fuerzas estabilizadoras}}{\text{fuerzas desestabilizadoras}} = \frac{\tilde{\nu}W}{\tilde{T}} = \frac{\bar{a}\tilde{b}\tilde{\nu}\tilde{\gamma}}{\tilde{T}} \geq F_s^0 \quad (7.59)$$

donde F_s^0 es el correspondiente límite inferior del coeficiente de seguridad asociado al vuelco.

3. *Fallo por hundimiento de la cimentación.* El coeficiente de seguridad frente al hundimiento F_b se define como el ratio entre la capacidad portante del terreno y la máxima tensión ejercida por la base del muro en el terreno

$$F_b = g_b(\bar{\mathbf{d}}, \tilde{\boldsymbol{\eta}}, \tilde{\boldsymbol{\phi}}, \boldsymbol{\psi}) = \frac{\text{capacidad portante}}{\text{máxima tensión}} = \frac{\tilde{S}}{\sigma_{mean}} = \frac{\tilde{S}}{\tilde{\gamma}\bar{b}} \geq F_b^0 \quad (7.60)$$

donde F_b^0 es el correspondiente límite inferior del coeficiente de seguridad. Nótese que se ha hecho una aproximación muy grosera al asumir una distribución constante de la tensión para simplificar.

Lógicamente, el muro será seguro siempre que se cumpla que $F_o, F_s, F_b \geq 1$.

7.4.1. Resolución del método combinado (PSFM) mediante el método de relajación

En esta sección se presenta la resolución del método combinado mediante el procedimiento de resolución de la sección 6.2.1. El procedimiento iterativo constará de tres partes fundamentales: (1) un diseño clásico óptimo (en el sentido de minimizar una función objetivo), (2) evaluación de los índices de fiabilidad para todos los modos de fallo con el diseño clásico obtenido en (1), y por último, ajuste de los nuevos valores de los coeficientes de seguridad globales hasta que se satisfagan todas las restricciones de fiabilidad.

Particularizando para el método de relajación con el problema de diseño mixto global (7.17)-(7.22):

Resolución del diseño clásico. Se minimiza el siguiente problema de optimización determinista basado en coeficientes de seguridad. Inicialmente ($\nu = 1$) los coeficientes de seguridad $F_i^{(\nu)}$ se toman iguales a los límites inferiores de los coeficientes de seguridad F_i^0 .

$$\text{Minimizar } c(\bar{\mathbf{d}}, \tilde{\boldsymbol{\eta}}, \tilde{\boldsymbol{\phi}}, \boldsymbol{\psi}) \quad (7.61)$$

$$\bar{\mathbf{d}}$$

sujeto a

$$g_i(\bar{\mathbf{d}}, \tilde{\boldsymbol{\eta}}, \tilde{\boldsymbol{\phi}}, \boldsymbol{\psi}) \geq F_i^{(\nu)} : \forall i \in I \quad (7.62)$$

$$r_j(\bar{\mathbf{d}}, \tilde{\boldsymbol{\eta}}, \tilde{\boldsymbol{\phi}}, \boldsymbol{\psi}) \leq 0 : \forall j \in J \quad (7.63)$$

$$\mathbf{h}(\bar{\mathbf{d}}, \tilde{\boldsymbol{\eta}}, \tilde{\boldsymbol{\phi}}) = \boldsymbol{\psi} \quad (7.64)$$

$$\bar{\mathbf{d}}^{\text{lo}} \leq \bar{\mathbf{d}} \leq \bar{\mathbf{d}}^{\text{up}} \quad (7.65)$$

El resultado de este problema será un diseño $\bar{\mathbf{d}}^{(\nu)}$ que satisface las restricciones (7.62) asociadas a los coeficientes de seguridad y a los condicionantes geométricos o impuestos por los códigos (7.63). Pero aún no se sabe si se cumplen las relativas a los índices de fiabilidad.

Paso 2. Evaluación de los índices de fiabilidad β_i . Se obtienen los índices de fiabilidad asociados al diseño clásico anterior $\bar{\mathbf{d}}^{(\nu)}$ mediante el siguiente problema

$$\beta_i^{(\nu)} = \underset{\mathbf{z}}{\text{Mínimo}} \sqrt{\mathbf{z}^T \mathbf{z}} \quad (7.66)$$

sujeto a

$$g_i(\mathbf{d}, \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{\psi}) \geq 1 : \boldsymbol{\lambda} \quad (7.67)$$

$$\mathbf{h}(\mathbf{d}, \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\phi}) = \boldsymbol{\psi} \quad (7.68)$$

$$\mathbf{T}(\mathbf{d}, \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{\kappa}) = \mathbf{z} \quad (7.69)$$

En esta etapa se resuelven tantos subproblemas como modos de fallo. Nótese que el valor de $\bar{\mathbf{d}}^{(\nu)}$ está implícito en la transformación de Rosenblatt (7.69) y que $\boldsymbol{\lambda}$ es el vector con las variables duales asociadas a la restricción que fija el valor del coeficiente de seguridad a 1, es decir, fallo estricto.

Paso 3: Comprobación de la convergencia. Si $\|\beta^{(\nu)} - \beta^{(n-1)}\| < \epsilon$ y $\beta^{(\nu)} \geq \beta^0$ entonces, para el procedimiento se ha alcanzado la solución. En caso contrario, ir al paso 4.

Paso 4: Actualización de los coeficientes de seguridad. Los coeficientes de seguridad se modifican para cumplir las restricciones β^0 mediante la fórmula

$$\Delta F_i^{(\nu)} = \rho(\beta_i^0 - \beta_i^{(\nu)}); \quad i \in I, \quad (7.70)$$

donde ρ es el coeficiente de relajación, o la fórmula alternativa

$$\Delta F_i^{(\nu)} = \frac{(\beta_i^0 - \beta_i^{(\nu)})}{\lambda_i}; \quad i \in I. \quad (7.71)$$

Nótese que si los índices de fiabilidad actuales $\beta_i^{(\nu)}$ son menores que los límites inferiores impuestos β_i^0 los coeficientes de seguridad aumentan ya que $\Delta F_i^{(\nu)} > 0$. En caso de que los nuevos valores de los coeficientes sean menores que F_i^0 , los valores de los coeficientes se mantendrán iguales a $F_i^{(\nu)} = F_i^0$.

Aumentar ν en una unidad $\nu = \nu + 1$ e ir al paso 1.

En la figura 7.9 se muestra el diagrama de flujo básico del método.

Ejemplo ilustrativo 7.1 (Diseño de un muro mediante el método combinado de coeficientes de seguridad probabilidades de fallo). Se va a plantear la resolución del método aplicado al caso del muro presentado en la subsección 7.4.

Suponiendo que las variables aleatorias que intervienen son todas normales:

$$a \sim N(\bar{a}, \sigma_a); \quad b \sim N(\bar{b}, \sigma_b); \quad \nu \sim N(\bar{\nu}, \sigma_\nu);$$

$$T \sim N(\bar{T}, \sigma_T); \quad \gamma \sim N(\bar{\gamma}, \sigma_\gamma); \quad H \sim N(\bar{H}, \sigma_H); \quad S \sim N(\bar{S}, \sigma_S),$$

donde $\sigma_a, \sigma_b, \sigma_\nu, \sigma_T, \sigma_\gamma$ y σ_S son las desviaciones típicas de las variables aleatorias normales a, b, ν, T, γ y S , respectivamente. La transformación de Rosenblatt [140] particularizada para este ejemplo viene dada por

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{a - \bar{a}}{\sigma_a}; & z_2 &= \frac{b - \bar{b}}{\sigma_b}; & z_3 &= \frac{\nu - \bar{\nu}}{\sigma_\nu}; & z_4 &= \frac{T - \bar{T}}{\sigma_T}; \\ z_5 &= \frac{\gamma - \bar{\gamma}}{\sigma_\gamma}; & z_6 &= \frac{H - \bar{H}}{\sigma_H}; & z_7 &= \frac{S - \bar{S}}{\sigma_S}, \end{aligned} \quad (7.72)$$

Por tanto, el algoritmo 6.1 en este caso procede de la siguiente manera:

Paso 0: Iniciación. Hacer

$$\nu = 1; \quad F_o^{(1)} = F_o^0; \quad F_s^{(1)} = F_s^0; \quad F_b^{(1)} = F_b^0$$

donde los valores F_o^0, F_s^0 y F_b^0 son los límites inferiores de los coeficientes de seguridad.

Paso 1: Resolución del problema clásico (maestro):

$$\begin{aligned} &\text{Minimizar} && \bar{a}\bar{b} \\ &&& \bar{a}, \bar{b} \end{aligned} \quad (7.73)$$

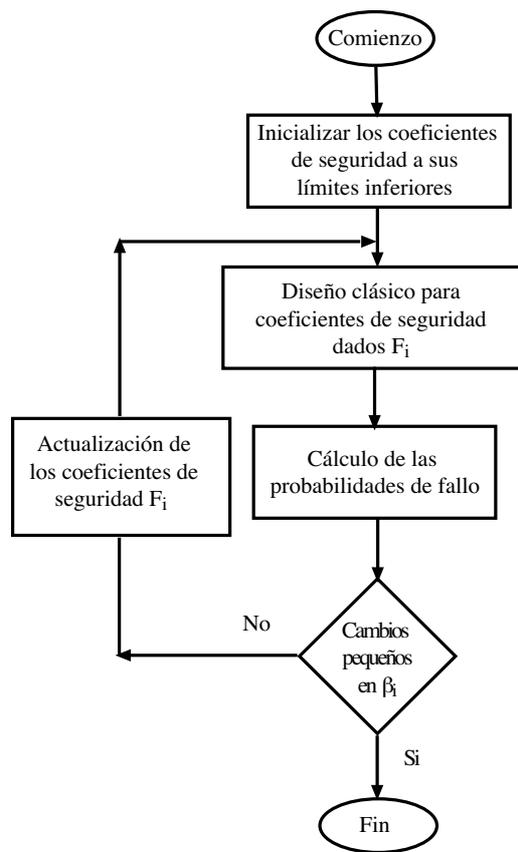


Figura 7.9: Diagrama de flujo del método combinado de probabilidades de fallo y coeficientes de seguridad.

sujeto a

$$\frac{\bar{a}^2 \bar{b} \tilde{\gamma}}{2 \tilde{H} \tilde{T}} \geq F_o^{(\nu)} \quad (7.74)$$

$$\frac{\bar{a} \bar{b} \nu \tilde{\gamma}}{\tilde{T}} \geq F_s^{(\nu)} \quad (7.75)$$

$$\frac{\tilde{S}}{\tilde{\gamma} \bar{b}} \geq F_b^{(\nu)} \quad (7.76)$$

$$\bar{b} = 2\bar{a}. \quad (7.77)$$

Paso 2: Evaluación de los índices de fiabilidad (subproblemas). Para $i = 1, 2, 3$:

$$\beta_i^{(\nu)} = \underset{a, b, \nu, T, \gamma, H, S}{\text{Mínimo}} \sum_{i=1}^7 z_i^2 \quad (7.78)$$

sujeto a (7.66) y

$$\frac{a^2 b \gamma}{2 H T} = 1 \quad (7.79)$$

$$\frac{a b \nu \gamma}{T} = 1 \quad (7.80)$$

o

$$\frac{S}{\gamma b} = 1 \quad (7.81)$$

dependiendo de si $i = 1, 2$ o 3 , es decir, si tratamos con el vuelco, deslizamiento ó hundimiento respectivamente.

Paso 3: Comprobación de la convergencia: Si $\|\beta^{(\nu)} - \beta^{(\nu-1)}\| < \epsilon$ y $\beta^{(\nu)} > \beta^0$ entonces, parar. Si no, ir al paso 4.

Paso 4: Actualizar los coeficientes de seguridad: Los coeficientes de seguridad se modifican para cumplir las restricciones β^0 mediante la fórmula

$$F_i^{(\nu+1)} = \text{máx} \left(F_i^{(\nu)} + \rho(\beta_i^0 - \beta^{(\nu)}), F_i^0 \right) \quad (7.82)$$

donde ρ es el coeficiente de relajación, o la fórmula alternativa

$$F_i^{(\nu+1)} = \text{máx} \left(F_i^{(\nu)} + \frac{(\beta_i^0 - \beta_i^{(\nu)})}{\lambda_i}, F_i^0 \right) \quad (7.83)$$

Aumentar ν en una unidad $\nu = \nu + 1$ e ir al paso 1.

Usando este algoritmo con los datos de la tabla 7.2 y asumiendo que las restricciones tanto de coeficientes de seguridad como de índices de fiabilidad son las siguientes:

$$F_o^0 = 1,5; \quad F_s^0 = 1,6; \quad F_b^0 = 1,5; \quad \beta_o^0 = 3; \quad \beta_s^0 = 3; \quad \beta_b^0 = 3,$$

se obtiene que la solución de este problema, como se muestra en la tabla 7.3, que es: $\bar{a} = 3,053\text{m}$ y $\bar{b} = 6,107\text{m}$. El procedimiento converge en sólo 6 iteraciones, y la única

Cuadro 7.2: Datos para el ejemplo numérico del muro.

	Variable x						
	a (m)	b (m)	ν	T (kN)	γ (kN/m ³)	H (m)	S (kN/m ²)
\bar{x} o \tilde{x}	\bar{a}	\bar{b}	0,3	50	23	3	220
σ_x	0,01	0,01	0,05	1	0,46	0,2	16

Cuadro 7.3: Ilustración del procedimiento iterativo de relajación para el ejemplo del muro.

t	$cost$	a	b	Límites actuales			Valores reales			Valores reales		
				F_o^0	F_s^0	F_b^0	F_o	F_s	F_b	β_o	β_s	β_b
1	11.594	2.408	4.816	1.500	1.600	1.500	2.140	1.600	1.986	3.456	1.491	6.763
2	20.332	3.189	6.377	1.500	2.807	1.500	4.970	2.806	1.500	10.132	3.245	4.508
3	18.918	3.076	6.152	1.500	2.611	1.500	4.461	2.611	1.555	9.084	3.042	4.832
4	18.672	3.056	6.112	1.500	2.577	1.500	4.374	2.577	1.565	8.900	3.005	4.890
5	18.645	3.054	6.107	1.500	2.573	1.500	4.365	2.573	1.566	8.879	3.000	4.897
6	18.642	3.053	6.107	1.500	2.573	1.500	4.364	2.573	1.566	8.877	3.000	4.897

restricción activa es la asociada a β_s , las demás (F_o, F_s, F_b, β_o y β_b) son inactivas. Esto significa que la restricción del índice de fiabilidad al deslizamiento es tan restrictiva que implica que se cumplan todas las demás.

Nótese que los valores del coeficiente de seguridad al vuelco (4,364) y de su índice de fiabilidad (8,877) son muy altos, lo que implica que es muy poco probable que falle por vuelco. ■

En el apéndice A.4 se presenta la implementación del método de relajación para resolver problemas de fiabilidad basándose en el método combinado (PSFM).

7.4.2. Resolución del método combinado (PSFM) mediante la aproximación por hiperplanos

El método iterativo de relajación presentado anteriormente requería un coeficiente de relajación ρ que ha de fijarse mediante un procedimiento de prueba y error, además no permitía la resolución del modelo mixto con coeficientes de seguridad parciales. Una adecuada selección del valor del coeficiente o la aplicación de técnicas de sobrerrelajación o subrelajación podría mejorar la convergencia de forma considerable, pero una mala selección del mismo podría ralentizarla, e incluso no converger. En esta sección se presenta la aplicación del método de aproximación por hiperplanos tratado en la subsección 6.2.2.

Particularizando el planteamiento general del método de aproximación por hiperplanos al problema de diseño mixto global (7.17)-(7.22) las tres etapas quedarían para la iteración genérica ν como:

Paso 1. Resolución del diseño clásico:

$$\underset{\bar{\mathbf{d}}}{\text{Minimizar}} \quad c(\bar{\mathbf{d}}, \tilde{\boldsymbol{\eta}}, \tilde{\boldsymbol{\phi}}, \boldsymbol{\psi}) \quad (7.84)$$

sujeto a

$$g_i(\bar{\mathbf{d}}, \tilde{\boldsymbol{\eta}}, \tilde{\boldsymbol{\phi}}, \boldsymbol{\psi}) \geq F_i^0 : \forall i \in I \quad (7.85)$$

$$\beta_i^{(s)} + \boldsymbol{\lambda}_i^{(s)T} (\bar{\mathbf{d}} - \bar{\mathbf{d}}^{(s)}) \geq \beta_i^0 : \forall i \in I; s = 1, 2, \dots, \nu - 1 \quad (7.86)$$

$$r_j(\bar{\mathbf{d}}, \tilde{\boldsymbol{\eta}}, \tilde{\boldsymbol{\phi}}, \boldsymbol{\psi}) \leq 0 : \forall j \in J \quad (7.87)$$

$$\mathbf{h}(\bar{\mathbf{d}}, \tilde{\boldsymbol{\eta}}, \tilde{\boldsymbol{\phi}}) = \boldsymbol{\psi} \quad (7.88)$$

$$\bar{\mathbf{d}}^{\text{lo}} \leq \bar{\mathbf{d}} \leq \bar{\mathbf{d}}^{\text{up}} \quad (7.89)$$

El resultado de este problema será un diseño $\bar{\mathbf{d}}^{(\nu)}$ que satisface las restricciones (7.85) asociadas a los coeficientes de seguridad, a los condicionantes geométricos o impuestos por los códigos (7.87) y a una aproximación lineal de las restricciones relativas a los índices de fiabilidad (7.86).

Paso 2. Evaluación de los índices de fiabilidad β_i . Se obtienen los índices de fiabilidad asociados al diseño clásico anterior $\bar{\mathbf{d}}^{(\nu)}$ mediante el siguiente problema

$$\beta_i^{(\nu)} = \underset{\mathbf{z}, \bar{\mathbf{d}}}{\text{Mínimo}} \quad \sqrt{\mathbf{z}^T \mathbf{z}} \quad (7.90)$$

sujeto a

$$g_i(\mathbf{d}, \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{\psi}) = 1 \quad (7.91)$$

$$\mathbf{h}(\mathbf{d}, \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\phi}) = \boldsymbol{\psi} \quad (7.92)$$

$$\mathbf{T}(\mathbf{d}, \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{\kappa}) = \mathbf{z} \quad (7.93)$$

$$\bar{\mathbf{d}} = \bar{\mathbf{d}}^{(\nu)} : \boldsymbol{\lambda}_i^{(\nu)} \quad (7.94)$$

donde $\boldsymbol{\lambda}_i^{(\nu)}$ es el vector con las variables duales asociadas a la restricción (7.94) que fija los valores medios de las variables para la iteración ν a los valores obtenidos en el clásico $\bar{\mathbf{d}}^{(\nu)}$.

Paso 3: Comprobación de la convergencia. Si $\|\boldsymbol{\beta}^{(\nu)} - \boldsymbol{\beta}^{(n-1)}\| < \epsilon$ entonces, se para el procedimiento pues se ha alcanzado la solución. En caso contrario, aumentar ν en una unidad $\nu = \nu + 1$ e ir al paso 1.

Nótese que el problema (7.84)-(7.89) es una relajación del problema (7.17)-(7.22) en el sentido de que las funciones $\beta_i^{(s)}(\cdot)$ son aproximaciones mediante hiperplanos. Conforme el método aumenta el número de iteraciones la aproximación va siendo cada vez más precisa, lo que implica que el problema (7.84)-(7.89) cada vez reproduce de manera más exacta el problema (7.17)-(7.22) (véase Kelley [101]). Nótese que esto puede suponer un problema si la ecuación $\beta_i(\bar{\mathbf{d}}, \tilde{\boldsymbol{\eta}}, \tilde{\boldsymbol{\phi}}, \boldsymbol{\psi}, \boldsymbol{\kappa})$ (7.19) tiene un cambio de curvatura en el dominio de validez de las variables, pero se puede resolver sin más que actualizar de forma dinámica los hiperplanos aproximantes conforme el método avanza, hasta el punto de que también convergería si se usa sólo el último hiperplano calculado.

Ejemplo ilustrativo 7.2 (Diseño de un muro mediante el método combinado de coeficientes de seguridad probabilidades de fallo). Se va a plantear la resolución del método aplicado al caso del muro presentado en la subsección 7.4 y al ejemplo ilustrativo 7.1.

El algoritmo 6.2 en este caso consta de las siguientes etapas:

Paso 0: Iniciación. Hacer

$$\nu = 1; \quad F_o^{(1)} = F_o^0; \quad F_s^{(1)} = F_s^0; \quad F_b^{(1)} = F_b^0$$

donde los valores F_o^0, F_s^0 y F_b^0 son los límites inferiores de los coeficientes de seguridad.

Paso 1: Resolución del problema clásico (maestro).

$$\begin{aligned} \text{Minimizar} \quad & \bar{a}\bar{b} \\ & \bar{a}, \bar{b} \end{aligned} \quad (7.95)$$

sujeto a

$$\frac{\bar{a}^2 \bar{b} \tilde{\gamma}}{2\tilde{H}\tilde{T}} \geq F_o^{(\nu)} \quad (7.96)$$

$$\frac{\bar{a}\bar{b}\nu\tilde{\gamma}}{\tilde{T}} \geq F_s^{(\nu)} \quad (7.97)$$

$$\frac{\tilde{S}}{\tilde{\gamma}\bar{b}} \geq F_b^{(\nu)} \quad (7.98)$$

$$\beta_i^{(s)} + \lambda_i^{(s)T} \left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a^{(s)} \\ b^{(s)} \end{pmatrix} \right) \geq \beta_i^0; \quad \forall i \in I; \quad s = 1, 2, \dots, \nu - 1 \quad (7.99)$$

$$\bar{b} = 2\bar{a}; \quad (7.100)$$

Paso 2: Evaluación de los índices de fiabilidad (subproblemas). Para $i = 1, 2, 3$:

$$\beta_i^{(\nu)} = \underset{a, b, \nu, T, \gamma, H, S}{\text{Mínimo}} \sum_{i=1}^7 z_i^2 \quad (7.101)$$

sujeto a (7.66) y

$$\frac{a^2 b \gamma}{2HT} = 1 \quad (7.102)$$

$$\frac{ab\nu\gamma}{T} = 1 \quad (7.103)$$

o

$$\frac{S}{\gamma b} = 1 \quad (7.104)$$

dependiendo de si $i = 1, 2$ o 3 , es decir, si se trata con el vuelco, deslizamiento o hundimiento respectivamente.

Paso 3: Comprobación de la convergencia. Si $\|\beta^{(\nu)} - \beta^{(\nu-1)}\| < \epsilon$ entonces, parar. Si no, aumentar ν en una unidad $\nu = \nu + 1$ e ir al paso 1.

Usando este algoritmo con mismos datos de la tabla 7.2 y asumiendo las mismas restricciones tanto de coeficientes de seguridad como de índices de fiabilidad:

$$F_o^0 = 1,5; F_s^0 = 1,6; F_b^0 = 1,5; \beta_o^0 = 3; \beta_s^0 = 3; \beta_b^0 = 3,$$

se obtiene que la solución de este problema, como se muestra en la tabla 7.3, es la misma que se alcanza con el otro método: $\bar{a} = 3,053\text{m}$ y $\bar{b} = 6,107\text{m}$. La evolución de los resultados se muestra en la tabla 7.4. En este caso el método converge tras 5 iteraciones, una iteración menos que con el método de relajación pero con la ventaja de que no se necesita actualización de los coeficientes de seguridad, por eso las columnas de la tabla relativas a los límites inferiores de los coeficientes de seguridad no cambian permaneciendo iguales a los valores F_i^0 .

Cuadro 7.4: Ilustración del procedimiento iterativo de resolución mediante la aproximación por hiperplanos.

n	$cost$	a	b	Límites actuales			Valores reales			Valores reales		
				F_o^0	F_s^0	F_b^0	F_o	F_s	F_b	β_o	β_s	β_b
1	11.594	2.408	4.816	1.500	1.600	1.500	2.140	1.600	1.986	3.456	1.491	6.763
2	17.463	2.955	5.910	1.500	1.600	1.500	3.956	2.410	1.619	7.989	2.807	5.180
3	18.603	3.050	6.100	1.500	1.600	1.500	4.350	2.567	1.568	8.848	2.994	4.906
4	18.642	3.053	6.107	1.500	1.600	1.500	4.363	2.573	1.567	8.877	3.000	4.897
5	18.642	3.053	6.107	1.500	1.600	1.500	4.363	2.573	1.567	8.877	3.000	4.897

■

Un ventaja adicional del método de aproximación por hiperplanos es que permite resolver también el problema de diseño mixto parcial, es decir, aquel que utiliza coeficientes parciales de seguridad asociados a las variables aleatorias en vez de globales asociados a las restricciones. Particularizando el planteamiento general del método de aproximación por hiperplanos al problema de diseño mixto parcial (7.23)-(7.29) las tres etapas quedarían para la iteración genérica ν como:

Paso 1. Resolución del diseño clásico.

$$\text{Minimizar } c(\bar{\mathbf{d}}, \tilde{\boldsymbol{\eta}}, \tilde{\boldsymbol{\phi}}, \boldsymbol{\psi}) \quad (7.105)$$

$$\bar{\mathbf{d}}$$

sujeto a

$$g_i(\boldsymbol{\gamma}^T(\bar{\mathbf{d}}, \tilde{\boldsymbol{\eta}}, \tilde{\boldsymbol{\phi}}), \boldsymbol{\psi}) \geq 1; \forall i \in I \quad (7.106)$$

$$\beta_i^{(s)} + \boldsymbol{\lambda}_i^{(s)T}(\bar{\mathbf{d}} - \bar{\mathbf{d}}^{(s)}) \geq \beta_i^0; \forall i \in I; s = 1, 2, \dots, \nu - 1 \quad (7.107)$$

$$r_j(\boldsymbol{\gamma}^T(\bar{\mathbf{d}}, \tilde{\boldsymbol{\eta}}, \tilde{\boldsymbol{\phi}}), \boldsymbol{\psi}) \leq 0; \forall j \in J \quad (7.108)$$

$$\mathbf{h}(\boldsymbol{\gamma}^T(\bar{\mathbf{d}}, \tilde{\boldsymbol{\eta}}, \tilde{\boldsymbol{\phi}})) = \boldsymbol{\psi} \quad (7.109)$$

$$\bar{\mathbf{d}}^{\text{lo}} \leq \bar{\mathbf{d}} \leq \bar{\mathbf{d}}^{\text{up}} \quad (7.110)$$

$$\boldsymbol{\gamma}^{\text{lo}} \leq \boldsymbol{\gamma} \leq \boldsymbol{\gamma}^{\text{up}} \quad (7.111)$$

El resultado de este problema será un diseño $\bar{\mathbf{d}}^{(\nu)}$ que satisface las restricciones (7.106) asociadas a los coeficientes de seguridad, a los condicionantes geométricos o impuestos por los códigos (7.108) y a una aproximación lineal de las restricciones relativas a los índices de fiabilidad (7.107).

Paso 2. Evaluación de los índices de fiabilidad $\beta_i^{(\nu)}$. Se obtienen los índices de fiabilidad asociados al diseño clásico anterior $\bar{\mathbf{d}}^{(\nu)}$ resolviendo el siguiente problema:

$$\beta_i^{(\nu)} = \underset{\mathbf{z}, \bar{\mathbf{d}}}{\text{Mínimo}} \sqrt{\mathbf{z}^T \mathbf{z}} \quad (7.112)$$

sujeto a

$$g_i(\mathbf{d}, \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{\psi}) \geq 1 \quad (7.113)$$

$$\mathbf{h}(\mathbf{d}, \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\phi}) = \boldsymbol{\psi} \quad (7.114)$$

$$\mathbf{T}(\mathbf{d}, \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{\kappa}) = \mathbf{z} \quad (7.115)$$

$$\bar{\mathbf{d}} = \bar{\mathbf{d}}^{(\nu)} : \boldsymbol{\lambda}_i^{(\nu)} \quad (7.116)$$

donde $\boldsymbol{\lambda}_i^{(\nu)}$ es el vector con las variables duales asociadas a la restricción (7.116) que fija los valores medios de las variables para la iteración ν a los valores obtenidos en el clásico $\bar{\mathbf{d}}^{(\nu)}$.

Paso 3: Comprobación de la convergencia. Si $\|\boldsymbol{\beta}^{(\nu)} - \boldsymbol{\beta}^{(\nu-1)}\| < \epsilon$ entonces, se para el procedimiento pues se ha alcanzado la solución. En caso contrario, se aumenta ν en una unidad $\nu = \nu + 1$ e se va al paso 1.

En el apéndice A.5 se muestra el código GAMS del ejemplo del muro resuelto mediante el método de aproximación por hiperplanos.

7.5. Resolución de los Modelos Generales. Global y Parcial.

En los casos en los que se traten de resolver los problemas más genéricos posibles con restricciones y variables de complicación, es decir los modelos generales (7.30)-(7.35) y (7.36)-(7.42) se utilizará un método combinado que trate las restricciones de complicación (asociadas a las restricciones de fiabilidad) y las variables de complicación, entendiendo por variable de complicación la probabilidad de fallo.

La mejor solución desde el punto de vista computacional es una descomposición de Benders externa para tratar las variables de complicación, y la aproximación por hiperplanos interna para tratar las restricciones de fiabilidad.

Particularizando para el modelo general global (7.30)-(7.35), el procedimiento quedaría de la siguiente manera:

Paso 0: Iniciación. Seleccionar unos valores iniciales para las variables de diseño (complicación) $\mathbf{d}^{(0)}$.

Iniciar el contador de iteraciones a $\nu = 1$, $\bar{\mathbf{d}}^{(\nu)} = \mathbf{d}^{(0)}$, y la cota inferior del óptimo del coste total a $C_{10}^{(\nu)} = -\infty$.

Paso 1. Evaluación de los índices de fiabilidad $\beta_i^{(\nu)}$. En función de las variables de diseño seleccionadas, se calcula en índice de fiabilidad resolviendo el problema

$$\beta_i^{(\nu)} = \underset{\mathbf{z}, \bar{\mathbf{d}}}{\text{Minimo}} \sqrt{\mathbf{z}^T \mathbf{z}} \quad (7.117)$$

sujeto a

$$g_i(\mathbf{d}, \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{\psi}) \geq 1 \quad (7.118)$$

$$\mathbf{h}(\mathbf{d}, \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\phi}) = \boldsymbol{\psi} \quad (7.119)$$

$$\mathbf{T}(\mathbf{d}, \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{\kappa}) = \mathbf{z} \quad (7.120)$$

$$\bar{\mathbf{d}} = \bar{\mathbf{d}}^{(\nu)} : \boldsymbol{\lambda}_i^{(\nu)} \quad (7.121)$$

donde $\boldsymbol{\lambda}_i^{(\nu)}$ es el vector con las variables duales asociadas a la restricción (7.121) que fija los valores medios de las variables para la iteración ν a los valores obtenidos en el clásico $\bar{\mathbf{d}}^{(\nu)}$.

Paso 2: Evaluación del coste total. Para los valores de las variables de diseño $\bar{\mathbf{d}}^{(\nu)}$ y de los índices de fiabilidad $\beta^{(\nu)}$ se evalúa el coste total

$$C_{to}^{(\nu)}(\bar{\mathbf{d}}^{(\nu)}, \tilde{\boldsymbol{\eta}}, \tilde{\boldsymbol{\phi}}, \boldsymbol{\psi}, \boldsymbol{\kappa}) = C_{co}(\bar{\mathbf{d}}^{(\nu)}, \tilde{\boldsymbol{\eta}}, \tilde{\boldsymbol{\phi}}, \boldsymbol{\psi}) + C_{\beta^{(\nu)}}(\bar{\mathbf{d}}^{(\nu)}, \tilde{\boldsymbol{\eta}}, \tilde{\boldsymbol{\phi}}, \boldsymbol{\psi}, \boldsymbol{\kappa}) \quad (7.122)$$

y las derivadas con respecto a las variables de complicación

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Omega}^{(\nu)} &= \frac{\partial C_{to}^{(\nu)}(\bar{\mathbf{d}}^{(\nu)}, \tilde{\boldsymbol{\eta}}, \tilde{\boldsymbol{\phi}}, \boldsymbol{\psi}, \boldsymbol{\kappa})}{\partial \bar{\mathbf{d}}^{(\nu)}} = \frac{\partial C_{co}(\bar{\mathbf{d}}^{(\nu)}, \tilde{\boldsymbol{\eta}}, \tilde{\boldsymbol{\phi}}, \boldsymbol{\psi})}{\partial \bar{\mathbf{d}}^{(\nu)}} + \frac{\partial C_{\beta^{(\nu)}}(\bar{\mathbf{d}}^{(\nu)}, \tilde{\boldsymbol{\eta}}, \tilde{\boldsymbol{\phi}}, \boldsymbol{\psi}, \boldsymbol{\kappa})}{\partial \bar{\mathbf{d}}^{(\nu)}} = \\ &= \frac{\partial C_{co}(\bar{\mathbf{d}}^{(\nu)}, \tilde{\boldsymbol{\eta}}, \tilde{\boldsymbol{\phi}}, \boldsymbol{\psi})}{\partial \bar{\mathbf{d}}^{(\nu)}} + \sum_{\forall i} \lambda_i^{(\nu)} \frac{\partial C_{\beta^{(\nu)}}(\bar{\mathbf{d}}^{(\nu)}, \tilde{\boldsymbol{\eta}}, \tilde{\boldsymbol{\phi}}, \boldsymbol{\psi}, \boldsymbol{\kappa})}{\partial \beta_i^{(\nu)}} \end{aligned} \quad (7.123)$$

Actualización del límite superior del valor óptimo del coste a $C_{up}^{(\nu)} = C_{to}^{(\nu)}$.

Paso 3: Comprobación de la convergencia. Si $|C_{up}^{(\nu)} - C_{lo}^{(\nu)}| / |C_{up}^{(\nu)}| \leq \varepsilon$, la solución del problema con una tolerancia ε es

$$C_{to}^* = C_{to}^{(\nu)}; \quad \mathbf{d}^* = \mathbf{d}^{(\nu)}.$$

En otro caso, se hace $\nu \leftarrow \nu + 1$ e se va al paso 4.

Paso 4. Resolución del problema maestro. La reconstrucción por hiperplanos de la función de coste total y de las restricciones de complicación se usa para calcular los nuevos valores de las variables de complicación o diseño

$$\underset{\alpha_{cost}, \bar{\mathbf{d}}^{(\nu)}}{\text{Minimizar}} \alpha_{cost} \quad (7.124)$$

sujeto a

$$\alpha_{cost} \geq C_{to}^{(j)} + \boldsymbol{\Omega}^{(j)T} (\bar{\mathbf{d}}^{(\nu)} - \bar{\mathbf{d}}^{(j)}); \quad \forall j = 1, \dots, \nu - 1 \quad (7.125)$$

$$F_i^0 \leq g_i(\bar{\mathbf{d}}^{(\nu)}, \tilde{\boldsymbol{\eta}}, \tilde{\boldsymbol{\phi}}, \boldsymbol{\psi}); \quad \forall i \in I \quad (7.126)$$

$$\beta_i^0 \leq \beta_i^{(j)} + \boldsymbol{\lambda}_i^{(j)T} (\bar{\mathbf{d}}^{(\nu)} - \bar{\mathbf{d}}^{(j)}); \quad \forall i \in I; \quad j = 1, 2, \dots, \nu - 1 \quad (7.127)$$

$$0 \leq r_j(\bar{\mathbf{d}}^{(\nu)}, \tilde{\boldsymbol{\eta}}, \tilde{\boldsymbol{\phi}}, \boldsymbol{\psi}); \quad \forall j \in J \quad (7.128)$$

$$\boldsymbol{\psi} = \mathbf{h}(\bar{\mathbf{d}}^{(\nu)}, \tilde{\boldsymbol{\eta}}, \tilde{\boldsymbol{\phi}}) \quad (7.129)$$

$$\bar{\mathbf{d}}^{\text{lo}} \leq \bar{\mathbf{d}}^{(\nu)} \leq \bar{\mathbf{d}}^{\text{up}} \quad (7.130)$$

La solución de este problema maestro nos da los valores de las variables de diseño $\bar{\mathbf{d}}^{(\nu)}$ para la iteración ν . Seguidamente se actualiza el límite inferior del óptimo de la función de coste total $C_{\text{lo}}^{(\nu)} = \alpha_{cost}$ y se va al paso 1.

En el caso de que la restricción (7.127) experimente un cambio de curvatura dentro de la región de factibilidad del problema el método podrá no converger. En estos casos introducir sólo la última aproximación calculada de la restricción

$$\beta_i^0 \geq \beta_i^{(j)} + \boldsymbol{\lambda}_i^{(j)T} (\bar{\mathbf{d}}^{(\nu)} - \bar{\mathbf{d}}^{(j)}); \quad \forall i \in I; \quad j = \nu - 1.$$

El modelo general parcial (7.36)-(7.42) se resuelve de forma análoga sin más que sustituir las restricciones (7.126), (7.128) y (7.129) del problema maestro por (7.37), (7.39), (7.40) y añadir los límites de los coeficientes parciales de seguridad (7.42).

7.6. Análisis de Sensibilidad en Problemas de Optimización con Restricciones de Fiabilidad.

Ya se ha visto como mediante técnicas de fiabilidad de primer orden (FORM) y técnicas de optimización se pueden plantear y resolver múltiples problemas ingenieriles (RBO). La solución de estos problemas proporciona una solución óptima en función de las variables de proyecto \mathbf{x}^* , de la función objetivo y de las restricciones que intervienen en el modelo, que han de satisfacer las condiciones de Karush-Kuhn-Tucker (Frangopol [79] y Enevoldsen [71]).

Un aspecto muy importante para comprobar la calidad del modelo es el estudio de sensibilidad, es decir, la influencia de los parámetros de proyecto en la solución óptima. Existen en la literatura múltiples trabajos que abordan este problema mediante la utilización de técnicas de perturbación de las condiciones de optimalidad de Karush-Kuhn-Tucker teniendo en cuenta sólo las restricciones de igualdad y desigualdad activas y suponiendo que permanecen activas después de la perturbación (véase Sobieski et al. [151], Enevoldsen [71], Sorensen y Enevoldsen [154, 155]). Esta aproximación conduce a un sistema de ecuaciones que permite obtener las sensibilidades. Posteriormente Castillo et al. [39] incluyeron en el análisis las restricciones de desigualdad con lo que tras derivar las condiciones de Karush-Kuhn-Tucker plantean un sistema de desigualdades lineal cuya solución es un cono.

Prescindiendo de desarrollos teóricos sobre sensibilidad, el objetivo de esta sección es plantear y aplicar el método general de sensibilidad expuesto en la subsección 6.3.2.

7.6.1. Análisis de sensibilidad en el método combinado probabilidad coeficiente de seguridad (PSFM).

Se va a aplicar el análisis de sensibilidad con el método general para la resolución de problemas mediante el método combinado de probabilidades de fallo coeficientes de seguridad (PSFM). La aplicación en los demás modelos es totalmente extrapolable de forma inmediata.

Dado que el estudio de sensibilidad se realizará una vez se tenga la solución óptima del problema, se va a plantear los modelos auxiliares que me permiten obtener todas las sensibilidades partiendo de la solución óptima.

Particularizando al planteamiento general del método de relajación para resolver el diseño mixto global (7.17)-(7.22) y teniendo en cuenta que la solución óptima del problema es $\bar{\mathbf{d}}^*$, \mathbf{d}_i^* , η_i^* y ϕ_i^* ; $\forall i \in I$:

Sensibilidad en el modelo mixto global. Se plantea el siguiente problema auxiliar

$$\underset{\bar{\mathbf{d}}^{\text{aux}}, \tilde{\eta}^{\text{aux}}, \tilde{\phi}^{\text{aux}}, \boldsymbol{\kappa}^{\text{aux}}}{\text{Minimizar}} \quad c(\bar{\mathbf{d}}^{\text{aux}}, \tilde{\eta}^{\text{aux}}, \tilde{\phi}^{\text{aux}}, \boldsymbol{\psi}) \quad (7.131)$$

sujeto a

$$g_i(\bar{\mathbf{d}}^{\text{aux}}, \tilde{\eta}^{\text{aux}}, \tilde{\phi}^{\text{aux}}, \boldsymbol{\psi}) \geq F_i^0 : \Gamma_i; \forall i \in I \quad (7.132)$$

$$\sqrt{\mathbf{z}_i^T \mathbf{z}_i} \geq \beta_i^0 : \Lambda_i; \forall i \in I \quad (7.133)$$

$$\mathbf{T}(\mathbf{d}_i^*, \eta_i^*, \phi_i^*, \boldsymbol{\kappa}^{\text{aux}}) = \mathbf{z}_i; \forall i \in I \quad (7.134)$$

$$r_j(\bar{\mathbf{d}}^{\text{aux}}, \tilde{\eta}^{\text{aux}}, \tilde{\phi}^{\text{aux}}, \boldsymbol{\psi}) \leq 0; \forall j \in J \quad (7.135)$$

$$\mathbf{h}(\bar{\mathbf{d}}^{\text{aux}}, \tilde{\eta}^{\text{aux}}, \tilde{\phi}^{\text{aux}}) = \boldsymbol{\psi} \quad (7.136)$$

$$\tilde{\eta}^{\text{aux}} = \tilde{\eta} : \boldsymbol{\varsigma} \quad (7.137)$$

$$\tilde{\phi}^{\text{aux}} = \tilde{\phi} : \boldsymbol{\varrho} \quad (7.138)$$

$$\boldsymbol{\kappa}^{\text{aux}} = \boldsymbol{\kappa} : \boldsymbol{\nu} \quad (7.139)$$

de donde se obtiene la sensibilidad Γ del coste con respecto a los límites inferiores de los coeficientes de seguridad \mathbf{F}^0 , las derivadas parciales Λ con respecto a los límites inferiores de los índices de fiabilidad β^0 , las sensibilidades $\boldsymbol{\varsigma}$, $\boldsymbol{\varrho}$ y $\boldsymbol{\nu}$ del coste con respecto $\tilde{\eta}$, $\tilde{\phi}$ y $\boldsymbol{\kappa}$, respectivamente. Con lo cual el ingeniero proyectista conoce la influencia que tienen todas las variables de proyecto y las restricciones de fiabilidad, tanto clásicas como modernas, en el coste. Con las ventajas que eso conlleva.

Sensibilidad con respecto a los índices de fiabilidad β_i . Se plantea el siguiente problema

$$\beta_i^* = \underset{\mathbf{z}, \bar{\mathbf{d}}^{\text{aux}}, \tilde{\eta}^{\text{aux}}, \tilde{\phi}^{\text{aux}}, \boldsymbol{\kappa}^{\text{aux}}}{\text{Mínimo}} \quad \sqrt{\mathbf{z}^T \mathbf{z}} \quad (7.140)$$

sujeto a

$$g_i(\mathbf{d}, \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{\psi}) = 1 \quad (7.141)$$

$$\mathbf{h}(\mathbf{d}, \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\phi}) = \boldsymbol{\psi} \quad (7.142)$$

$$\mathbf{T}(\mathbf{d}, \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{\kappa}^{\text{aux}}) = \mathbf{z} \quad (7.143)$$

$$\bar{\mathbf{d}}^{\text{aux}} = \bar{\mathbf{d}}^* : \boldsymbol{\lambda}_i \quad (7.144)$$

$$\tilde{\boldsymbol{\eta}}^{\text{aux}} = \tilde{\boldsymbol{\eta}} : \boldsymbol{\vartheta}_i \quad (7.145)$$

$$\tilde{\boldsymbol{\phi}}^{\text{aux}} = \tilde{\boldsymbol{\phi}} : \boldsymbol{\varphi}_i \quad (7.146)$$

$$\boldsymbol{\kappa}^{\text{aux}} = \boldsymbol{\kappa} : \boldsymbol{\Upsilon}_i \quad (7.147)$$

de tal forma que se obtienen las derivadas $\boldsymbol{\lambda}_i$ del índice de fiabilidad β_i con respecto a los valores medios o característicos óptimos de las variables de diseño $\bar{\mathbf{d}}^*$, las sensibilidades $\boldsymbol{\vartheta}_i$ con respecto a los valores característicos de los parámetros $\tilde{\boldsymbol{\eta}}$, las derivadas parciales $\boldsymbol{\varphi}_i$ con respecto a los valores característicos de los agentes $\tilde{\boldsymbol{\phi}}$ y por último las sensibilidades $\boldsymbol{\Upsilon}_i$ de los parámetros estadísticos $\boldsymbol{\kappa}$. Estos valores son extremadamente útiles para el proyectista porque sabe en todo momento la influencia que tienen todas las variables de proyecto en cada uno de los modos de fallo, y puede saber cuáles requieren mayor control, o que variables ha de modificar para cambiar la fiabilidad con respecto al modo de fallo considerado. Estas sensibilidades nos dan la influencia de la parámetros en la probabilidad de fallo, y son las sensibilidades del vector Θ en el cálculo de la probabilidad de fallo condicionada dada por la ecuación (1.55).

Nótese que los valores de $\bar{\mathbf{d}}^{\text{aux}}$, $\tilde{\boldsymbol{\eta}}^{\text{aux}}$, $\tilde{\boldsymbol{\phi}}^{\text{aux}}$ están implícitos en la transformación de Rosenblatt (7.143), y que la solución del modelo dará los puntos de máxima verosimilitud ya conocidos $\bar{\mathbf{d}}_i^*$, $\boldsymbol{\eta}_i^*$ y $\boldsymbol{\phi}^*$.

Si se quisieran calcular las mismas sensibilidades con el método de aproximación por hiperplanos, sólo se tendría que modificar el problema clásico, que quedaría de la siguiente manera:

Sensibilidad en el modelo mixto global. Se plantea el siguiente problema auxiliar

$$\text{Minimizar}_{\bar{\mathbf{d}}^{\text{aux}}, \tilde{\boldsymbol{\eta}}^{\text{aux}}, \tilde{\boldsymbol{\phi}}^{\text{aux}}, \boldsymbol{\kappa}^{\text{aux}}} c(\bar{\mathbf{d}}^{\text{aux}}, \tilde{\boldsymbol{\eta}}^{\text{aux}}, \tilde{\boldsymbol{\phi}}^{\text{aux}}, \boldsymbol{\psi}) \quad (7.148)$$

sujeto a

$$g_i(\bar{\mathbf{d}}^{\text{aux}}, \tilde{\boldsymbol{\eta}}^{\text{aux}}, \tilde{\boldsymbol{\phi}}^{\text{aux}}, \boldsymbol{\psi}) \geq F_i^0 : \Gamma_i; \forall i \in I \quad (7.149)$$

$$\beta_i^* + \boldsymbol{\lambda}_i^T (\bar{\mathbf{d}}^{\text{aux}} - \bar{\mathbf{d}}^*) + \boldsymbol{\vartheta}_i^T (\tilde{\boldsymbol{\eta}}^{\text{aux}} - \tilde{\boldsymbol{\eta}}) + \boldsymbol{\varphi}_i^T (\tilde{\boldsymbol{\phi}}^{\text{aux}} - \tilde{\boldsymbol{\phi}}) + \boldsymbol{\Upsilon}_i^T (\boldsymbol{\kappa}^{\text{aux}} - \boldsymbol{\kappa}) \geq \beta_i^0; \Lambda_i; \forall i \in I \quad (7.150)$$

$$r_j(\bar{\mathbf{d}}^{\text{aux}}, \tilde{\boldsymbol{\eta}}^{\text{aux}}, \tilde{\boldsymbol{\phi}}^{\text{aux}}, \boldsymbol{\psi}) \leq 0; \forall j \in J \quad (7.151)$$

$$\mathbf{h}(\bar{\mathbf{d}}^{\text{aux}}, \tilde{\boldsymbol{\eta}}^{\text{aux}}, \tilde{\boldsymbol{\phi}}^{\text{aux}}) = \boldsymbol{\psi} \quad (7.152)$$

$$\tilde{\boldsymbol{\eta}}^{\text{aux}} = \tilde{\boldsymbol{\eta}} : \boldsymbol{\varsigma} \quad (7.153)$$

$$\tilde{\boldsymbol{\phi}}^{\text{aux}} = \tilde{\boldsymbol{\phi}} : \boldsymbol{\varrho} \quad (7.154)$$

$$\boldsymbol{\kappa}^{\text{aux}} = \boldsymbol{\kappa} : \boldsymbol{\nu} \quad (7.155)$$

en el que las restricciones (7.133) y (7.134) se han sustituido por la aproximación del hiperplano (7.150). Nótese que las pendientes del hiperplano son precisamente las variables duales de las restricciones (7.144), (7.145), (7.146) y (7.147) ($\boldsymbol{\lambda}_i$, $\boldsymbol{\vartheta}_i$, $\boldsymbol{\varphi}_i$ y $\boldsymbol{\Upsilon}_i$). Lógicamente los valores de las sensibilidades por ambos métodos son los mismos.

Ejemplo ilustrativo 7.3 (Sensibilidad en el ejemplo del muro mediante el método de relajación). Aplicando el estudio de sensibilidad al muro del ejemplo ilustrativo 7.1, se obtienen los siguientes resultados mostrados en la tabla 7.5.

Cuadro 7.5: Sensibilidades en el ejemplo ilustrativo del muro.

x	$\frac{\partial c}{\partial x}$	$\frac{\partial \beta_t}{\partial x}$	$\frac{\partial \beta_s}{\partial x}$	$\frac{\partial \beta_b}{\partial x}$
\bar{a}	--	6,095	0,950	0,000
\bar{b}	--	1,521	0,475	-1,440
$\bar{\nu}$	-105.047	0,000	16,339	0,000
\bar{T}	0.246	-0,057	-0,038	0,000
$\bar{\gamma}$	-0.813	0,418	0,127	-0,376
\bar{H}	0.000	-2,409	0,000	0,000
\bar{S}	0.000	0,000	0,000	0,062
σ_a	0.174	-3,294	-0,027	0,000
σ_b	0.043	-0,205	-0,007	-0,101
σ_ν	257.455	0,000	-40,045	0,000
σ_T	0.423	-0,430	-0,066	0,000
σ_γ	0.142	-0,713	-0,022	-0,318
σ_H	0.000	-10,295	0,000	0,000
σ_S	0.000	0,000	0,000	-0,297
F_o	0.000	--	--	--
F_s	0.000	--	--	--
F_b	0.000	--	--	--
β_0	0.000	--	--	--
β_s	6.429	--	--	--
β_b	0.000	--	--	--

De la que se obtiene una gran cantidad de información, por ejemplo, se puede comprobar cómo efectivamente la única restricción de seguridad activa es la asociada al índice de fiabilidad por deslizamiento β_s , y por tanto los parámetros estadísticos que más influencia (mayor sensibilidad) tienen en el coste son los asociados al deslizamiento, el valor medio del coeficiente de fricción $\bar{\nu}$ (-105,047) y su desviación típica σ_ν (257,455). En los modelos de fiabilidad también se comprueba cómo el aumento de la incertidumbre en las variables disminuye el índice de fiabilidad con el consiguiente aumento de la probabilidad de fallo (valores negativos en todas las sensibilidades), y cómo el aumento de los valores medios de las acciones estabilizadoras aumenta la fiabilidad mientras que el aumento de las desestabilizadoras la disminuye, así por ejemplo, el aumento del peso específico γ aumentan la fiabilidad con respecto a vuelco (0,418) y deslizamiento (0,127), mientras en el caso de hundimiento la disminuye (-0,376).

■

Para el caso del diseño mixto parcial (7.23)-(7.29), es decir, empleando coeficientes de seguridad parciales, la solución devolvería los coeficientes parciales óptimos γ^* y el problema

auxiliar global sería:

Sensibilidad en el modelo mixto parcial. Se plantea el siguiente problema auxiliar

$$\text{Minimizar}_{\bar{\mathbf{d}}^{\text{aux}}, \tilde{\boldsymbol{\eta}}^{\text{aux}}, \tilde{\boldsymbol{\phi}}^{\text{aux}}, \boldsymbol{\kappa}^{\text{aux}}, \boldsymbol{\gamma}^{\text{aux}}} c(\bar{\mathbf{d}}^{\text{aux}}, \tilde{\boldsymbol{\eta}}^{\text{aux}}, \tilde{\boldsymbol{\phi}}^{\text{aux}}, \boldsymbol{\psi}) \quad (7.156)$$

sujeto a

$$g_i(\boldsymbol{\gamma}^{\text{aux}T}(\bar{\mathbf{d}}^{\text{aux}}, \tilde{\boldsymbol{\eta}}^{\text{aux}}, \tilde{\boldsymbol{\phi}}^{\text{aux}}), \boldsymbol{\psi}) \geq 1; \forall i \in I \quad (7.157)$$

$$\beta_i^* + \boldsymbol{\lambda}_i^T(\bar{\mathbf{d}}^{\text{aux}} - \bar{\mathbf{d}}^*) + \boldsymbol{\vartheta}_i^T(\tilde{\boldsymbol{\eta}}^{\text{aux}} - \tilde{\boldsymbol{\eta}}) + \boldsymbol{\varphi}_i^T(\tilde{\boldsymbol{\phi}}^{\text{aux}} - \tilde{\boldsymbol{\phi}}) + \boldsymbol{\Upsilon}_i^T(\boldsymbol{\kappa}^{\text{aux}} - \boldsymbol{\kappa}) \geq \beta_i^0; \Lambda_i; \forall i \in I \quad (7.158)$$

$$r_j(\boldsymbol{\gamma}^{\text{aux}T}(\bar{\mathbf{d}}^{\text{aux}}, \tilde{\boldsymbol{\eta}}^{\text{aux}}, \tilde{\boldsymbol{\phi}}^{\text{aux}}), \boldsymbol{\psi}) \leq 0; \forall j \in J \quad (7.159)$$

$$\mathbf{h}(\boldsymbol{\gamma}^{\text{aux}T}(\bar{\mathbf{d}}^{\text{aux}}, \tilde{\boldsymbol{\eta}}^{\text{aux}}, \tilde{\boldsymbol{\phi}}^{\text{aux}})) = \boldsymbol{\psi} \quad (7.160)$$

$$\tilde{\boldsymbol{\eta}}^{\text{aux}} = \tilde{\boldsymbol{\eta}} : \boldsymbol{\varsigma} \quad (7.161)$$

$$\tilde{\boldsymbol{\phi}}^{\text{aux}} = \tilde{\boldsymbol{\phi}} : \boldsymbol{\varrho} \quad (7.162)$$

$$\boldsymbol{\kappa}^{\text{aux}} = \boldsymbol{\kappa} : \boldsymbol{\nu} \quad (7.163)$$

$$\boldsymbol{\gamma}^{\text{aux}} = \boldsymbol{\gamma}^* : \boldsymbol{\tau} \quad (7.164)$$

con el que se obtienen las mismas sensibilidades que en el modelo mixto global pero sustituyendo las derivadas con respecto a los límites inferiores de los coeficientes de seguridad ($\boldsymbol{\Gamma}$) por las sensibilidades $\boldsymbol{\tau}$ con respecto a los valores óptimos de los coeficientes de seguridad parciales, que podrán ser iguales o no a los límites impuestos por la restricción (7.29).

Igualmente utiliza la aproximación por el hiperplano (7.158) para la restricción de complicación asociada a los índices de fiabilidad que emplea las variables duales $\boldsymbol{\lambda}_i, \boldsymbol{\vartheta}_i, \boldsymbol{\varphi}_i$ y $\boldsymbol{\Upsilon}_i$.

En el apéndice A.6 se presentan los códigos GAMS para el estudio de las sensibilidades aplicados al ejemplo del muro.

7.6.2. Análisis de sensibilidad en el modelo general.

En el caso de querer obtener la sensibilidad de los modelos generales se han de resolver dos modelos auxiliares, uno asociado a los problemas de fiabilidad y que coincide con el (7.140)-(7.147) del apartado anterior, y otro para el modelo global de coste:

$$\text{Minimizar}_{\alpha_{\text{cost}}, \bar{\mathbf{d}}^{\text{aux}}, \tilde{\boldsymbol{\eta}}^{\text{aux}}, \tilde{\boldsymbol{\phi}}^{\text{aux}}, \boldsymbol{\kappa}^{\text{aux}}} \alpha_{\text{cost}} \quad (7.165)$$

sujeto a

$$\begin{aligned} \alpha_{\text{cost}} &\geq C_{to}^* + \boldsymbol{\Omega}^T(\bar{\mathbf{d}}^{\text{aux}} - \bar{\mathbf{d}}^*) + \boldsymbol{\xi}^T(\tilde{\boldsymbol{\eta}}^{\text{aux}} - \tilde{\boldsymbol{\eta}}) \\ &\quad + \boldsymbol{\delta}^T(\tilde{\boldsymbol{\phi}}^{\text{aux}} - \tilde{\boldsymbol{\phi}}) + \boldsymbol{\chi}^T(\boldsymbol{\kappa}^{\text{aux}} - \boldsymbol{\kappa}) \end{aligned} \quad (7.166)$$

$$F_i^0 \leq g_i(\bar{\mathbf{d}}^{\text{aux}}, \tilde{\boldsymbol{\eta}}^{\text{aux}}, \tilde{\boldsymbol{\phi}}^{\text{aux}}, \boldsymbol{\psi}^{\text{aux}}) : \Gamma_i; \forall i \in I \quad (7.167)$$

$$\beta_i^0 \leq \beta_i^* + \boldsymbol{\lambda}_i^T(\bar{\mathbf{d}}^{\text{aux}} - \bar{\mathbf{d}}^*) + \boldsymbol{\vartheta}_i^T(\tilde{\boldsymbol{\eta}}^{\text{aux}} - \tilde{\boldsymbol{\eta}})$$

$$+ \varphi_i^T (\tilde{\phi}^{\text{aux}} - \tilde{\phi}) + \Upsilon_i^T (\kappa^{\text{aux}} - \kappa) : \zeta_i; \forall i \in I \quad (7.168)$$

$$0 \geq r_j(\bar{d}^{\text{aux}}, \tilde{\eta}^{\text{aux}}, \tilde{\phi}^{\text{aux}}, \psi); \forall j \in J \quad (7.169)$$

$$\psi = \mathbf{h}(\bar{d}^{\text{aux}}, \tilde{\eta}^{\text{aux}}, \tilde{\phi}^{\text{aux}}) \quad (7.170)$$

$$\tilde{\eta}^{\text{aux}} = \tilde{\eta} \quad (7.171)$$

$$\tilde{\phi}^{\text{aux}} = \tilde{\phi} \quad (7.172)$$

$$\kappa^{\text{aux}} = \kappa \quad (7.173)$$

de donde se obtienen las derivadas parciales del coste total Γ y ζ con respecto a los límites inferiores \mathbf{F}^0 y β^0 , respectivamente. Las derivadas del coste total con respecto a los parámetros son:

$$\Omega = \frac{\partial C_{to}^* (\bar{d}^*, \tilde{\eta}, \tilde{\phi}, \psi, \kappa)}{\partial \bar{d}^*} = \quad (7.174)$$

$$= \frac{\partial C_{co} (\bar{d}^*, \tilde{\eta}, \tilde{\phi}, \psi)}{\partial \bar{d}^*} + \sum_{\forall i} \lambda_i \frac{\partial C_{\beta^*} (\bar{d}^*, \tilde{\eta}, \tilde{\phi}, \psi, \kappa)}{\partial \beta_i^*} \quad (7.175)$$

$$\xi = \frac{\partial C_{to}^* (\bar{d}^*, \tilde{\eta}, \tilde{\phi}, \psi, \kappa)}{\partial \tilde{\eta}} = \quad (7.176)$$

$$= \frac{\partial C_{co} (\bar{d}^*, \tilde{\eta}, \tilde{\phi}, \psi)}{\partial \tilde{\eta}} + \sum_{\forall i} \vartheta_i \frac{\partial C_{\beta^*} (\bar{d}^*, \tilde{\eta}, \tilde{\phi}, \psi, \kappa)}{\partial \beta_i^*} \quad (7.177)$$

$$\delta = \frac{\partial C_{to}^* (\bar{d}^*, \tilde{\eta}, \tilde{\phi}, \psi, \kappa)}{\partial \tilde{\phi}} = \quad (7.178)$$

$$= \frac{\partial C_{co} (\bar{d}^*, \tilde{\eta}, \tilde{\phi}, \psi)}{\partial \tilde{\phi}} + \sum_{\forall i} \varphi_i \frac{\partial C_{\beta^*} (\bar{d}^*, \tilde{\eta}, \tilde{\phi}, \psi, \kappa)}{\partial \beta_i^*} \quad (7.179)$$

$$\chi = \frac{\partial C_{to}^* (\bar{d}^*, \tilde{\eta}, \tilde{\phi}, \psi, \kappa)}{\partial \kappa} = \quad (7.180)$$

$$= \frac{\partial C_{co} (\bar{d}^*, \tilde{\eta}, \tilde{\phi}, \psi)}{\partial \kappa} + \sum_{\forall i} \Upsilon_i \frac{\partial C_{\beta^*} (\bar{d}^*, \tilde{\eta}, \tilde{\phi}, \psi, \kappa)}{\partial \beta_i^*}. \quad (7.181)$$

Se pueden obtener de esta forma las derivadas del coste global (en la vida útil) con respecto a los factores de diseño, variables de diseño (ϖ), parámetros (ς), agentes (ϱ) y parámetros estadísticos (ν).

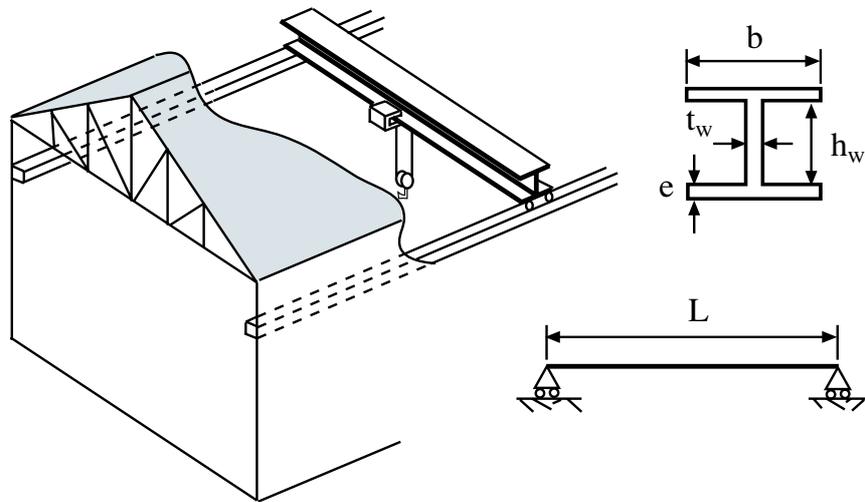


Figura 7.10: Ilustración gráfica del puente grúa y la viga principal.

7.7. Aplicación del método combinado probabilidad-coeficiente de seguridad al diseño de puentes grúa con estudio de sensibilidad.

Los requerimientos de la industria moderna necesitan de equipamiento de carga y movilidad de objetos grandes y pesados. De ahí que una rama de la ingeniería se dedique al diseño de puentes grúa. Lógicamente su diseño ha de cumplir una serie de especificaciones con respecto a la seguridad y uso, que estarán fijadas por los códigos de cada país, de tal forma que resistan con un margen razonable de seguridad las cargas y esfuerzos a los que va estar sometido.

En esta sección se va a aplicar el método mixto global, es decir, el método combinado de probabilidades de fallo con coeficientes de seguridad globales (PSFM) para diseñar el puente grúa de una nave industrial (véase la figura 7.10). En particular, se calcularán las dimensiones de la viga principal (bridge girder) que permite al carro (trolley) moverse horizontalmente. Tendrá una sección transversal en ‘T’ fabricada en chapa de acero, de tal forma que proporcione la máxima resistencia con el menor peso. La flecha máxima de la viga será función de su longitud.

Considérese la viga y la sección transversal de la figura 7.10, donde L es la luz o distancia entre los ejes de los railes longitudinales, b y e son la anchura y espesor de las chapas superior e inferior, respectivamente y h_w y t_w son la altura y espesor del alma, respectivamente.

El conjunto de variables se divide en los siguientes subconjuntos de acuerdo a la clasificación de la subsección 7.2.1:

d: Variables de diseño.

$$\mathbf{d} = \{b, e, t_w, h_w\}.$$

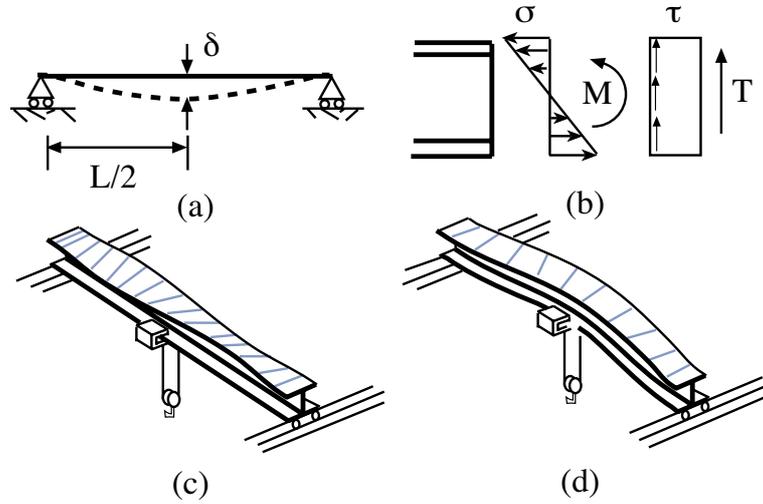


Figura 7.11: Ilustración de los modos de fallo considerados para el puente grúa.

η : *Parámetros.*

$$\eta = \{f_y, L, \gamma_y, E, \nu, c_y\},$$

donde f_y es el límite elástico del acero estructural, L es la longitud de la viga, γ_y es el peso específico del acero, E es el módulo de elasticidad del acero, ν el coeficiente de Poisson y c_y es el coste del acero estructural. En este caso los valores de f_y , L , γ_y se considerarán aleatorios y se trabaja en el clásico con sus valores medios μ_{f_y} , μ_L y μ_{γ_y} .

ϕ : *Agentes.*

$$\phi = \{P\},$$

donde P es el peso a manipular. Su valor medio es μ_P .

κ : *Parámetros estadísticos.*

$$\kappa = \{\sigma_{f_y}, \sigma_P, \sigma_L, \sigma_{\gamma_y}\},$$

donde σ se refiere a la desviación típica de la variable correspondiente.

ψ : *Variables auxiliares o no básicas.*

$$\psi = \{W, I_{xx}, I_{yy}, I_t, G, \sigma, \tau, M_{cr}, \delta\}.$$

En la aproximación clásica los coeficientes de seguridad se usan como restricciones y las variables se asumen como deterministas, iguales a los valores medios o característicos.

Asumiendo los cuatro modos de fallo siguientes (véase la figura 7.11):

1. *Máxima flecha permitida.* El coeficiente de seguridad con respecto a la flecha máxima F_d se define (véase la figura 7.11(a)) como

$$F_d = \frac{\delta_{max}}{\delta} \quad (7.182)$$

donde δ es la flecha máxima en centro luz, y δ_{max} es la flecha máxima permitida por los códigos.

2. *Estado límite último en el ala superior o inferior de la sección.* Se considera el ratio entre la resistencia del acero y el esfuerzo actuante como

$$F_u = \frac{f_y}{\sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2}} \quad (7.183)$$

donde F_u es el coeficiente de seguridad correspondiente, y σ y τ son las tensiones normal y tangencial en el centro de la viga, respectivamente.

3. *Estado límite último en el alma.* El coeficiente de seguridad F_w es el ratio entre la resistencia del acero y la tensión actuante en el alma

$$F_w = \frac{f_y}{\sqrt{3}\tau}. \quad (7.184)$$

4. *Pandeo lateral.* El coeficiente de seguridad frente al pandeo lateral F_b es el ratio entre el máximo momento flector en la viga y el momento crítico frente a pandeo de la sección

$$F_b = \frac{M}{M_{cr}}. \quad (7.185)$$

La viga será segura si y sólo si F_d, F_u, F_w y $F_b \geq 1$.

7.7.1. Obtención de las restricciones

En esta sección se muestra cómo se obtienen las variables necesarias para plantear las restricciones relativas a la seguridad, es decir, las ecuaciones de estado límite.

Propiedades geométricas y mecánicas de la viga

Los momentos de inercia I_{xx} e I_{yy} de la sección se obtienen como

$$I_{xx} = \frac{1}{12} (b(h_w + 2e)^3 - (b - t_w)h_w^3) \quad (7.186)$$

$$I_{yy} = \frac{1}{12} (2eb^3 - t_w h_w^3) \quad (7.187)$$

mientras que el momento de inercia torsional se calcula usando

$$I_t = \frac{1}{3} (2be^3 - h_w t_w^3). \quad (7.188)$$

La flecha en centro luz se obtiene usando la fórmula:

$$\delta = \frac{PL^3}{48EI_{xx}} + \frac{5WL^4}{384EI_{xx}}, \quad (7.189)$$

donde W es el peso de la viga por unidad de longitud

$$W = \gamma_s(2eb + t_w h_w). \quad (7.190)$$

Los esfuerzos en el centro de la viga se calculan considerando:

$$T = P/2 \quad (7.191)$$

$$M = PL/4 \quad (7.192)$$

donde T y M son el cortante y el momento, respectivamente. Así,

$$\sigma = \frac{M(h_w + e)}{2I_{xx}} \quad (7.193)$$

$$\tau = \frac{T}{h_w t_w} \quad (7.194)$$

El momento crítico frente al pandeo lateral es

$$M_{cr} = \frac{\pi}{L} \sqrt{EGI_{yy}I_t} \quad (7.195)$$

con el parámetro auxiliar

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)}.$$

Requerimientos de los códigos y otros

Las siguientes restricciones vienen impuestas por los códigos.

El espesor de acero debe satisfacer

$$0,008 \leq e \leq 0,15 \quad (7.196)$$

$$0,008 \leq t_w \leq 0,15 \quad (7.197)$$

y la máxima flecha permitida es

$$\delta_{max} = L/888.$$

Para evitar el pandeo lateral (véase la figura 7.11(c)) el diseño ha de cumplir la siguiente restricción

$$\frac{b}{2e} \leq 15 \sqrt{\frac{276}{f_y}} \quad (7.198)$$

donde f_y es la resistencia del acero en MPa .

Para soportar el peso del carro (trolley), elemento que se desliza suspendido del ala inferior y que soporta el motor y el gancho, el ancho mínimo ha de ser de 0,3 metros.

7.7.2. Ejemplo numérico

Para aplicar el método combinado se tiene que conocer la función de densidad conjunta de todas las variables que intervienen. Asumiendo para este ejemplo que todas las variables son normales independientes, es decir

$$f_y \sim N(\mu_{f_y}, \sigma_{f_y}); \quad P \sim N(\mu_P, \sigma_P); \quad L \sim N(\mu_L, \sigma_L); \quad \gamma_y \sim N(\mu_{\gamma_y}, \sigma_{\gamma_y}).$$

Los valores medios son:

$$\mu_{f_y} = 400 \text{ MPa}; \quad \mu_P = 600 \text{ kN}; \quad \mu_L = 6 \text{ m}; \quad \mu_{\gamma_y} = 78,5 \text{ kN/m}^3$$

y las desviaciones típicas:

$$\sigma_{f_y} = 251 \text{ MPa}; \quad \sigma_P = 90 \text{ kN}; \quad \sigma_L = 0,05; \quad \sigma_{\gamma_y} = 0,785 \text{ kN/m}^3.$$

Los parámetros constantes son:

$$E = 210000 \text{ MPa}; \quad \nu = 0,3; \quad c_y = 0,24 \text{ euro/kN}.$$

Asumiendo también que los límites inferiores de los coeficientes de seguridad y de los índices de fiabilidad son:

$$F_d^0 = 1,15; \quad F_u^0 = 1,5; \quad F_w^0 = 1,5; \quad F_b^0 = 1,3;$$

y

$$\beta_d^0 = 1,5; \quad \beta_u^0 = 3,7; \quad \beta_w^0 = 3,7; \quad \beta_b^0 = 3,2.$$

Nótese, que la ‘violación’ de los estados límite con consecuencias más serias tiene asociados mayores índices de fiabilidad,

Mediante la transformación de Rosenblatt [140], se obtiene el conjunto de variables normales estándar Z_1, Z_2, \dots, Z_4

$$z_1 = \frac{f_y - \mu_{f_y}}{\sigma_{f_y}}; \quad z_2 = \frac{P - \mu_P}{\sigma_P}; \quad z_3 = \frac{L - \mu_L}{\sigma_L}; \quad z_4 = \frac{\gamma_y - \mu_{\gamma_y}}{\sigma_{\gamma_y}}. \quad (7.199)$$

Resolviendo el problema mediante la aproximación por hiperplanos se obtienen los resultados mostrados en la tabla 7.6. El procedimiento converge en 9 iteraciones. En cada iteración se muestran los valores de las variables de diseño, y los valores actuales de los coeficientes de seguridad y de los índices de fiabilidad, asociados con los valores óptimos de las variables de diseño obtenidos del procedimiento clásico. Nótese en la solución final que ningún límite inferior de los coeficientes de seguridad es activo, mientras que los índices de fiabilidad β_b y β_d (en negrita en la tabla 7.6) son activos. También se muestran los valores óptimos de las variables

$$b, e, t_w, h_w.$$

Queda claro por tanto que debido a las restricciones impuestas con respecto al estado límite de servicio (flecha máxima) y al estado límite con respecto al pandeo lateral las demás restricciones de fiabilidad quedan inactivas. Además el diseño clásico es más caro que el inicial, porque el inicial, no cumplía las restricciones de seguridad.

Cuadro 7.6: Ilustración del procedimiento iterativo para el ejemplo del puente grúa.

ν	Units	1	2	3	4	5	6	7
$cost^{(\nu)}$	euro	2245,0	2243,2	2325,6	2354,8	2361,2	2362,2	2362,3
$b^{(\nu)}$	cm	41,81	30,00	36,14	39,25	40,43	40,67	40,68
$e^{(\nu)}$	mm	16,78	23,65	20,44	19,13	18,64	18,54	18,53
$t_w^{(\nu)}$	mm	8,00	8,00	8,00	8,00	8,00	8,00	8,00
$h_w^{(\nu)}$	cm	72,91	70,70	72,49	72,64	72,72	72,74	72,74
$F_u^{(\nu)}$	--	2,23	2,17	2,30	2,33	2,33	2,34	2,34
$F_t^{(\nu)}$	--	4,49	4,35	4,46	4,47	4,48	4,48	4,48
$F_b^{(\nu)}$	--	1,30	1,30	1,42	1,47	1,48	1,49	1,49
$F_d^{(\nu)}$	--	1,15	1,11	1,20	1,22	1,22	1,22	1,22
$\beta_u^{(\nu)}$	--	6,014	5,795	6,235	6,342	6,370	6,375	6,375
$\beta_t^{(\nu)}$	--	10,968	10,794	10,935	10,948	10,954	10,955	10,955
$\beta_b^{(\nu)}$	--	1,980	1,980	2,761	3,106	3,186	3,199	<u>3,200</u>
$\beta_d^{(\nu)}$	--	1,001	0,725	1,333	1,461	1,494	1,500	<u>1,500</u>
$error^{(\nu)}$	--	0,6627	0,3815	0,4563	0,1111	0,0253	0,0041	0,0002

Las sensibilidades que dan las derivadas del coste en el diseño óptimo se dan en la tabla 7.7. Así por ejemplo, un aumento de un euro en el coste unitario del acero c_y supone un aumento de 9842,876 euros en el coste total (véase la entrada correspondiente en la tabla 7.7). Similarmente, un aumento en el límite inferior del coeficiente de seguridad F_d no aumenta el coste, mientras que un aumento de la longitud de la viga conduce a un aumento del coste de 746,662 euros.

También proporciona las sensibilidades con respecto a los índices de fiabilidad. Nótese como un aumento en la dispersión de las variables (desviaciones típicas o coeficientes de variación) supone una disminución de los índices de fiabilidad con el correspondiente aumento de la probabilidad de fallo.

Cuadro 7.7: Sensibilidades del ejemplo del puente grúa.

	∂c	$\partial\beta_1$	$\partial\beta_2$	$\partial\beta_3$	$\partial\beta_4$
∂b	--	12,851	0,000	46,864	17,717
∂e	--	280,902	0,000	993,835	408,587
∂t_w	--	352,458	698,939	122,267	108,587
∂h_w	--	11,974	7,687	0,448	23,088
$\partial\mu_{f_y}$	0.000	0,000	0,000	0,000	0,000
$\partial\mu_P$	1.268	-0,008	-0,005	-0,011	-0,011
$\partial\mu_L$	746.662	-0,975	0,000	-3,218	-2,722
$\partial\mu_{\gamma_y}$	30.125	0,000	0,000	0,000	-0,001
$\partial\sigma_{f_y}$	0.000	0,000	0,000	0,000	0,000
$\partial\sigma_P$	3.312	-0,036	-0,027	-0,035	-0,016
$\partial\sigma_L$	149.935	-0,303	0,000	-1,657	-0,556
$\partial\sigma_{\gamma_y}$	0.000	0,000	0,000	0,000	0,000
∂E	0.000	0,000	0,000	0,000	0,000
$\partial\nu$	290.378	0,000	0,000	-3,730	0,000
∂c_y	9842.876	0,000	0,000	0,000	0,000
∂F_u	0.000	--	--	--	--
∂F_t	0.000	--	--	--	--
∂F_b	0.000	--	--	--	--
∂F_d	0.000	--	--	--	--
$\partial\beta_u$	0.000	--	--	--	--
$\partial\beta_t$	0.000	--	--	--	--
$\partial\beta_b$	77.858	--	--	--	--
$\partial\beta_d$	37.611	--	--	--	--

Capítulo 8

Aplicaciones

En el presente capítulo se presentan y desarrollan una serie de aplicaciones prácticas, basadas en problemas ingenieriles de diferente índole que utilizan la metodología explicada en el capítulo 7. Con ello se pretende mostrar por un lado la utilidad práctica del método para resolver todo tipo de problemas ingenieriles, y que existen actualmente en el mercado herramientas capaces de abordar este tipo de problemas independientemente de las ecuaciones utilizadas o del tamaño del mismo.

El capítulo está estructurado de la siguiente manera. En la sección 8.1 se aborda el problema de un muro vertical sometido al empuje del terreno. En la sección 8.2 se plantea el problema de una viga mixta perteneciente al tablero de un puente mixto. En la sección 8.3 se dimensiona un dique de escollera con espaldón de hormigón, y por último, en la sección 8.4, se explica y plantea la aplicación a problemas de estabilidad de taludes.

8.1. Muro vertical

En esta sección se describe con detalle el cálculo de un muro vertical basado en técnicas probabilistas.

8.1.1. Introducción al diseño de muros

Las estructuras de contención están diseñadas para sustentar el terreno, allí donde o bien no se sustenta por sí solo, o donde un talud económicamente razonable no es suficiente. El terreno natural, o relleno, ejerce un empuje sobre la estructura que tiende a hacer que esta vuelque, deslice, o vuelque y deslice a la vez. La punta, el alzado y el talón del muro actúan como ménsulas, y deben ser diseñadas para resistir las presiones del terreno. Así, el diseño de un muro implica:

1. Comprobar la estabilidad global de la estructura.
2. Obtener las tensiones máximas y mínimas sobre el talón y la punta del muro, y compararlas con las tensiones admisibles del terreno en el que se ubica el muro.
3. Dimensionar las armaduras de la punta, el alzado y el talón, para resistir los momentos flectores y los esfuerzos cortantes.

Existen en la actualidad varios programas comerciales, como Correct Surcharge, DDRW-1, EPRES, FREW, GRETA, GWALL, HEAVE, Kzero2, LPRES, RETAIN, Retaining Wall Design, RetWall, ReWaRD, SHEET, Sheetpile-2, SHORING, SPUNT-A2, SPW 911, STAWALL, UNIBEAR, WALLAP, etc., que obtienen las presiones que ejerce la base del muro sobre el terreno, soportando cualquier tipo de material de relleno, con sobrecargas o fuerzas puntuales externas actuando, bien sobre el muro, o sobre el terreno que soporta. Además, analizan la estabilidad de toda la estructura y diseñan el hormigón armado basándose en diferentes métodos de diseño.

La mayoría de ellos son capaces de obtener, tensiones en puntos clave del muro, leyes de flectores, cortantes, desplazamientos, asentos en el terreno, etc., e implementan coeficientes de seguridad.

Además, algunos de ellos diseñan muros verticales de acuerdo a códigos internacionales, como BS 8002, Eurocode 7, CIRIA 104, Hong Kong Geoguide, CP2, British Steel's Piling Handbook y Highway Agency's BD42/94.

Pero la mayoría de los programas existentes utilizan el diseño clásico, basado en coeficientes de seguridad, es decir, el diseño corresponde a un método de nivel I. En otras palabras, no se utilizan variables aleatorias, y por consiguiente, no se puede hablar de la probabilidad de fallo de la estructura. Sin embargo, se ha visto en los capítulos anteriores, que en la actualidad los métodos de nivel II y nivel III han sufrido un desarrollo muy importante, y es conveniente utilizarlos.

Un problema añadido de los programas que existen en la actualidad para diseñar este tipo de estructuras, es que las dimensiones del muro las tiene que dar el ingeniero, y sólo después de un proceso de calibrado, se obtiene un diseño aceptable. Pero incluso después de obtener un diseño satisfactorio, que cumpla todas las restricciones impuestas al problema, no se sabe si se está cerca o lejos del diseño óptimo. Es por eso que en esta sección se aborda el diseño óptimo, automático y con consideraciones probabilistas de un muro vertical.

8.1.2. Descripción del muro vertical

En el diseño de un muro vertical son muchas las variables que intervienen, dimensiones del muro, pendiente del terreno, resistencias del acero y del hormigón, propiedades del material de relleno, etc. Considérese por tanto el muro definido de forma paramétrica de la figura 8.1.

Los principales elementos del mismo son:

1. **Datos geométricos.**

h_1 : altura del muro.

2. **Datos sobre agentes externos.**

q : sobrecargas.

3. **Datos sobre la definición del material.**

γ_c : peso específico del hormigón.

γ_s : peso específico del terreno.

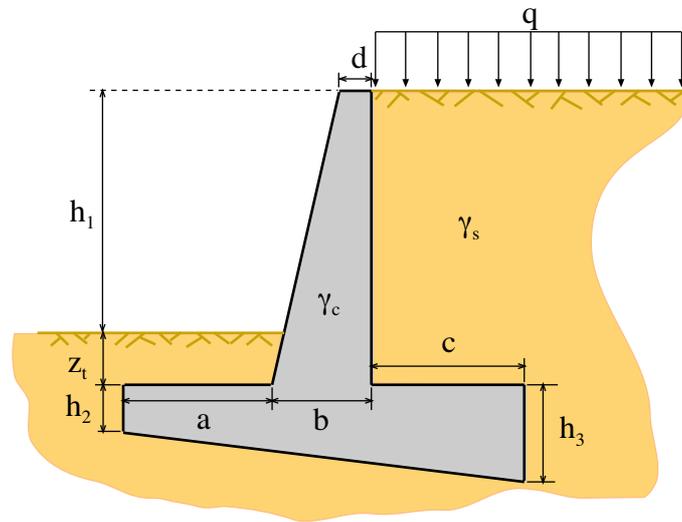


Figura 8.1: Descripción geométrica del muro.

γ_{st} : peso específico del acero.

f_c : resistencia del hormigón.

f_y : resistencia del acero.

k_a : coeficiente de empuje activo.

k_p : coeficiente de empuje pasivo.

σ_{soil} : resistencia del terreno.

ν_{crit} : coeficiente de rozamiento crítico.

τ_{max} : resistencia a cortante del hormigón.

4. **Datos sobre las armaduras.** Ver el detalle de la colocación de las armaduras en la figura 8.2.

r : recubrimiento.

ϕ_ℓ : diámetro de la armadura secundaria longitudinal (mínimo).

ϕ_t : diámetro de la armadura secundaria transversal (mínimo).

s_ℓ : espaciamiento entre barras en el armado longitudinal.

s_t : espaciamiento entre barras en el armado transversal.

5. **Límites inferiores de los coeficientes de seguridad.**

F_t^0 : coeficiente de seguridad al vuelco.

F_s^0 : coeficiente de seguridad al deslizamiento.

F_b^0 : coeficiente de seguridad con respecto a la capacidad portante del terreno.

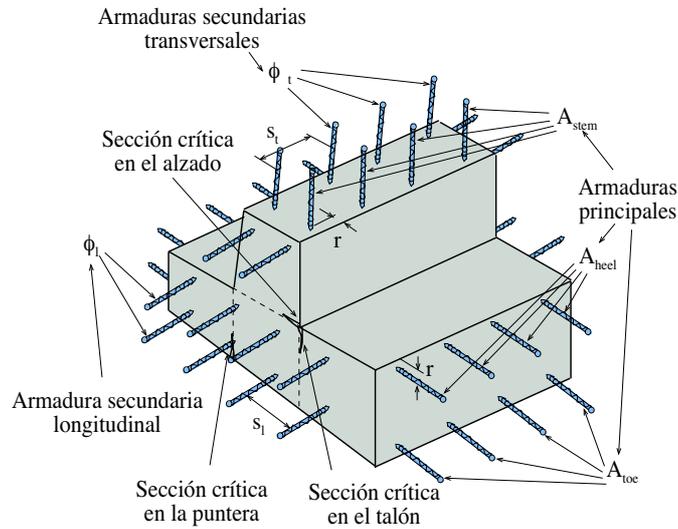


Figura 8.2: Detalle de la posición de la armadura.

F_{stem}^0 : coeficiente de seguridad con respecto al momento flector en el alzado.

F_{toe}^0 : coeficiente de seguridad con respecto al momento flector en la puntera.

F_{heel}^0 : coeficiente de seguridad con respecto al momento flector en el talón.

F_{stem}^0 : coeficiente de seguridad con respecto al esfuerzo cortante en el alzado.

F_{stoe}^0 : coeficiente de seguridad con respecto al esfuerzo cortante en la puntera.

F_{sheel}^0 : coeficiente de seguridad con respecto al esfuerzo cortante en el talón.

6. Costes.

c_c : coste del hormigón por metro cúbico.

c_{st} : coste del acero por Newton.

c_t : coste de encofrado por metro cuadrado.

c_{ex} : coste por metro cúbico de excavación.

7. Variables de diseño.

Estas son las variables cuyos valores medios serán determinados de forma automática por el procedimiento de optimización.

a : longitud de la puntera.

c : longitud del talón.

b : espesor del alzado en la base.

d : espesor del alzado en la coronación.

z_t : profundidad de la puntera.

h_2 : espesor mínimo de la puntera.

h_3 : espesor máximo del talón.

A_{stem} : armadura en el alzado.

A_{toe} : armadura en la puntera.

A_{heel} : armadura en el talón.

8.1.3. Clasificación de las variables y modos de fallo considerados

Dado que se va a utilizar el método PSFM, lo primero que se debe hacer es clasificar las variables que intervienen. Es muy importante distinguir bien entre variables de diseño (establecidas y deseadas por el ingeniero), que en este caso se consideran valores esperados, $E(X_i)$ o x_i , de las variables aleatorias $X_i; i = 1, \dots, n$, y valores reales x_i (que son los existentes en la realidad). Algunos de estos valores esperados son elegidos por el diseñador o por los códigos, y otros son seleccionados por el procedimiento de optimización. El conjunto de valores reales o actuales asociados con los valores esperados elegidos por el ingeniero constituirá el vector

$$\boldsymbol{\eta}_0 = (h_1, q, \gamma_c, \gamma_s, \gamma_{st}, f_c, f_y, k_a, k_p, \sigma_{soil}, \nu_{crit}, \tau_{max}, r, \phi_\ell, \phi_t, s_\ell, s_t, c_c, c_{st}, c_t, c_{ex}),$$

y el conjunto de valores reales o actuales asociados con las variables de diseño, obtenidas del procedimiento de optimización, constituirá el vector

$$\mathbf{d} = (a, b, c, d, z_t, h_2, h_3, A_{stem}, A_{toe}, A_{heel}).$$

Nótese que el vector $\boldsymbol{\eta}_0$ puede descomponerse según la clasificación de la subsección 7.2.1.

Los vectores de medias, valores esperados o característicos se llamarán $\tilde{\mathbf{d}}$ y $\tilde{\boldsymbol{\eta}}_0$, respectivamente.

Para el cálculo se asumirán los siguientes modos de fallo:

1. *Fallo por deslizamiento.* Este fallo puede analizarse considerando el ratio de las fuerzas estabilizadoras frente a las fuerzas deslizadoras

$$g_1(\bar{\mathbf{d}}, \tilde{\boldsymbol{\eta}}_0) = \frac{\text{fuerzas estabilizadoras}}{\text{fuerzas deslizadoras}} = F_s \quad (8.1)$$

donde F_s es el coeficiente de seguridad al deslizamiento.

2. *Fallo por vuelco.* Este fallo puede analizarse considerando el ratio de los momentos estabilizadores frente a los momentos volcadores con respecto a un punto

$$g_2(\bar{\mathbf{d}}, \tilde{\boldsymbol{\eta}}_0) = \frac{\text{momentos estabilizadores}}{\text{momentos volcadores}} = F_t \quad (8.2)$$

donde F_t es el coeficiente de seguridad al vuelco.

3. *Fallo por la capacidad portante del terreno.* Este fallo puede analizarse considerando el ratio entre la capacidad portante del terreno frente a las tensiones reales frente a los momentos volcadores con respecto a un punto

$$g_3(\bar{\mathbf{d}}, \tilde{\boldsymbol{\eta}}_0) = \frac{\text{capacidad portante}}{\text{tensión real}} = F_b \quad (8.3)$$

donde F_b es el coeficiente de seguridad frente a la capacidad portante del terreno.

4. *Rotura de las armaduras en el alzado, puntera o talón.* El análisis de este fallo puede hacerse considerando el ratio entre la resistencia a tracción del acero y las tensiones que actúan en cada una de las secciones pésimas del muro.

$$g_4(\bar{\mathbf{d}}, \tilde{\boldsymbol{\eta}}_0) = \frac{\text{resistencia a tracción del acero}}{\text{tensión}} = F_j; \quad j = \text{stem, toe, heel} \quad (8.4)$$

donde F_{stem} , F_{toe} and F_{heel} son los coeficientes de seguridad asociados al fallo por flexión en cada una de las secciones críticas.

5. *Fallo por cortante en el alzado, puntera o talón.* El análisis de esta fallo puede hacerse considerando el ratio entre la resistencia a cortante del hormigón y esfuerzos de cortante existentes en cada una de las secciones pésimas del muro.

$$g_5(\bar{\mathbf{d}}, \tilde{\boldsymbol{\eta}}_0) = \frac{\text{resistencia a cortante del hormigón}}{\text{esfuerzo cortante}} = F_j; \quad j = \text{sstem, stoe, sheel} \quad (8.5)$$

donde F_{sstem} , F_{stoe} and F_{sheel} son los coeficientes de seguridad asociados al fallo por cortante en cada una de las secciones críticas.

Como, incluyendo los tres modos de flexión y los tres de cortante, se tienen 9 modos de fallo diferentes, se define el conjunto I_f de modos de fallo como

$$I_f = \{s, t, b, stem, toe, heel, sstem, stoe, sheel\}.$$

Obsérvese que los coeficientes de seguridad son variables aleatorias. Por lo tanto, el muro será estable si y sólo si

$$F_s, F_t, F_b, F_{stem}, F_{toe}, F_{heel}, F_{sstem}, F_{stoe}, F_{sheel} \geq 1.$$

Es importante recalcar que sólo se han seleccionado los modos de fallo más relevantes, pero hay otros posibles, como hundimientos superficiales o profundos de terreno, etc.; sin embargo, por motivos de claridad, se han ignorado. También es importante mencionar que solo se han considerado estados de límite últimos que provocan la ruina estructural del conjunto, sin tener en cuenta estados límites de servicio.

8.1.4. Fuerzas que actúan en el muro

Antes de obtener el conjunto de restricciones de fallo, se debe determinar el peso total del muro y del terreno, las presiones que actúan sobre el muro así como los puntos de aplicación de sus resultantes. Una vez calculados, se plantean las restricciones de fallo ayudándose de un conjunto de variables auxiliares.

Una ventaja de los programas de optimización es que permiten la utilización de ecuaciones y variables auxiliares, con lo que no es necesario obtener una expresión explícita de los modos de fallo en función de las variables de diseño, que en ciertos casos podría ser muy complicado.

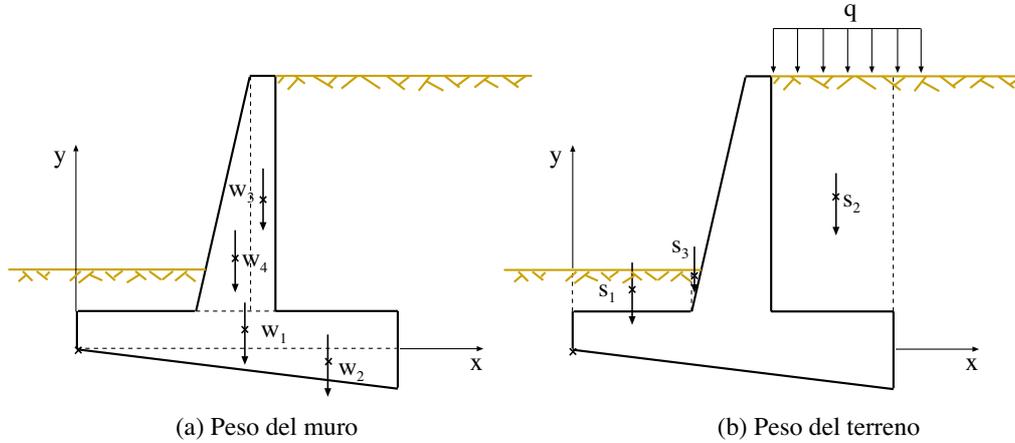


Figura 8.3: Descomposición de la sección transversal del muro en elementos geométricos simples (triángulos y rectángulos) para calcular: (a) el peso del muro, y (b) el peso del terreno.

Peso total del muro. De la figura 8.3(a) se obtienen los pesos y las distancias de los puntos de aplicación al origen de coordenadas O siguientes:

$$\begin{aligned}
 w_1 &= \gamma_c(a+b+c)h_2; & x_{w_1} &= (a+b+c)/2 \\
 w_2 &= \gamma_c(a+b+c)(h_3-h_2)/2; & x_{w_2} &= 2(a+b+c)/3 \\
 w_3 &= \gamma_c d(h_1+z_t); & x_{w_3} &= a+b-d/2 \\
 w_4 &= \gamma_c(b-d)(h_1+z_t)/2; & x_{w_4} &= a+2(b-d)/3 \\
 w &= \sum_{i=1}^4 w_i; & x_w &= \sum_{i=1}^4 w_i x_{w_i} / w
 \end{aligned} \tag{8.6}$$

donde $w_i; i = 1, 2, 3, 4$ son las pesos de las piezas correspondientes, y $x_{w_i}; i = 1, 2, 3, 4$ son las distancias de la resultante al origen de momentos O con respecto al eje OY , y w y x_w son el peso total y la situación de su punto de aplicación, respectivamente (véase la figura 8.3(a)).

Peso total del terreno. De forma similar, para los pesos de los suelos (véase la figura 8.3(b)) se tiene:

$$\begin{aligned}
 s_1 &= \gamma_s a z_t & x_{s_1} &= a/2 \\
 s_2 &= \gamma_s (h_1 + z_t + q/\gamma_s) c & x_{s_2} &= a + b + c/2 \\
 s_3 &= \gamma_s (b-d) z_t^2 / (2(h_1 + z_t)) & x_{s_3} &= a + (b-d) z_t / (3(h_1 + z_t)) \\
 s &= \sum_{i=1}^3 s_i & x_s &= \sum_{i=1}^3 s_i x_{s_i} / s
 \end{aligned} \tag{8.7}$$

donde $s_i; i = 1, 2, 3$ son los pesos de los bloques de terreno, y $x_{s_i}; i = 1, 2, 3$ son las abscisas de los centros de gravedad con respecto al eje OY , y s y x_s son el peso total y su localización, respectivamente.

Presiones del terreno. En la figura 8.4(a) se muestran las fuerzas debidas a la presión del terreno y la posición del centro de gravedad de las mismas:

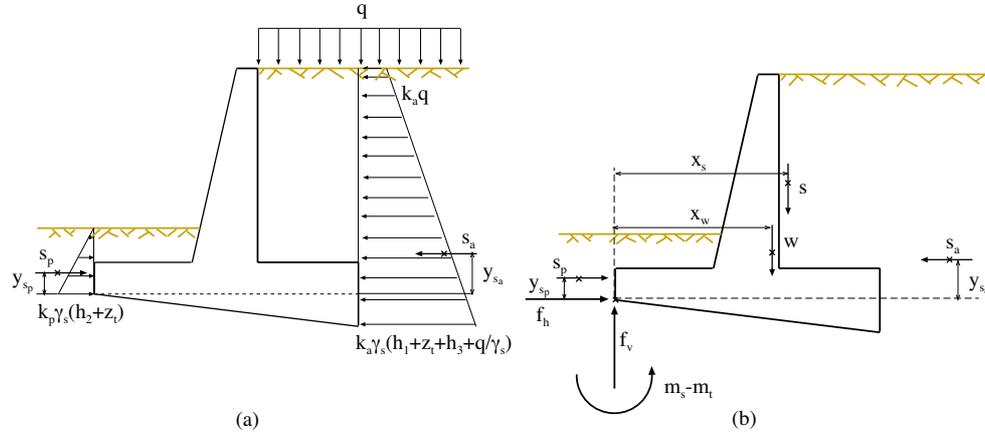


Figura 8.4: (a) Presiones del terreno a ambos lados del muro. (b) Reacciones del peso del muro, del terreno y del empuje del terreno sobre el muro.

$$\begin{aligned}
 s_p &= k_p \gamma_s (h_2 + z_t)^2 / 2 \\
 y_{s_p} &= (h_2 + z_t) / 3 \\
 s_a &= k_a \gamma_s (h_1 + z_t + h_3)^2 / 2 + k_a q (h_1 + z_t + h_3) \\
 y_{s_a} &= k_a (h_1 + z_t + h_3)^2 (q + \gamma_s (h_1 + z_t + h_3) / 3) / (2s_a) - h_3 + h_2
 \end{aligned} \tag{8.8}$$

donde s_p y s_a son las presiones horizontales, y y_{s_p} y y_{s_a} son las posiciones de sus resultantes, respectivamente.

Fuerzas resultantes con respecto a la puntera. De la figura 8.4(b) se obtiene:

$$f_h = s_a - s_p; \quad f_v = s + w; \quad m_t = s_a y_{s_a}; \quad m_s = s_p y_{s_p} + w x_w + s x_s, \tag{8.9}$$

donde f_h y f_v son las componentes horizontal y vertical de las fuerzas y m_t y m_s son los momentos volcadores y estabilizadores, respectivamente.

8.1.5. Criterios de diseño o imposiciones del código (requisitos legales)

Basándose en los cálculos previos es fácil escribir las restricciones de estado límite.

Restricción de vuelco. Esta restricción establece que el ratio momento estabilizador, momento volcador ha de ser mayor que el coeficiente de seguridad correspondiente:

$$m_s / m_t \geq F_t \tag{8.10}$$

Restricción de deslizamiento. Esta restricción establece que el ratio coeficiente de rozamiento crítico, coeficiente de rozamiento existente ha de ser mayor que el coeficiente de seguridad correspondiente:

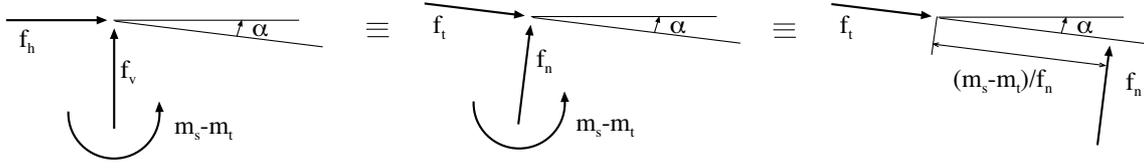


Figura 8.5: Ilustración de la localización de la reacción en la base del muro.

$$\mu_{crit}/\mu \geq F_s \quad (8.11)$$

donde, de la figura 8.5 se obtiene:

$$\begin{aligned} \alpha &= \arctan [(h_3 - h_2)/(a + b + c)] \\ f_n &= f_v \cos \alpha + f_h \sin \alpha \\ f_t &= f_h \cos \alpha - f_v \sin \alpha \\ \mu &= f_t/f_n \end{aligned} \quad (8.12)$$

Restricción de la capacidad portante. Esta restricción establece que la máxima tensión (σ_i) en el extremo izquierdo del pie del muro ha de ser menor que la capacidad portante del terreno dividida por el coeficiente de seguridad correspondiente:

$$\frac{\sigma_{soil}}{\sigma_i} \geq F_b \quad (8.13)$$

Donde, si $d_t = 3(m_s - m_t)/f_n \geq (a + b + c)/\cos \alpha$, de la figura 8.6(a) se obtiene

$$\begin{aligned} m_f &= (m_s - m_t) - f_n(a + b + c)/(2 \cos \alpha) \\ \sigma_i &= f_n \cos \alpha / (a + b + c) - 6m_f / ((a + b + c)/\cos \alpha)^2 \\ \sigma_t &= f_n \cos \alpha / (a + b + c) + 6m_f / ((a + b + c)/\cos \alpha)^2 \end{aligned} \quad (8.14)$$

y, de la figura 8.6(b) se obtiene

$$\begin{aligned} d_t &= 3(m_s - m_t)/f_n \\ \sigma_i &= 2f_n^2/(3(m_s - m_t)) \\ \sigma_t &= \sigma_i (1 - (a + b + c)/(d_t \cos(\alpha))). \end{aligned} \quad (8.15)$$

Como en el segundo caso σ_t es negativo, y este es un valor ficticio para calcular otras variables, ya que se considera que el terreno no resiste tracciones, se tomará como $\sigma_t = 0$.

Restricciones de flexión y esfuerzo cortante en el alzado, la puntera y el talón. Estas restricciones establecen que no se producirá fallo ni por flexión, ni por esfuerzo cortante en las localizaciones correspondientes.

Lo primero que se hace es calcular la armadura que necesita una sección general sometida a una fuerza normal (n), un esfuerzo cortante (v) y un momento flector (m) para resistir (véase la figura 8.7):

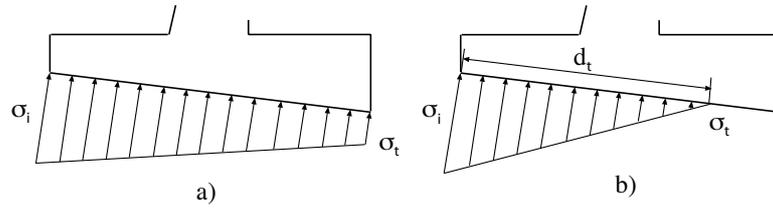


Figura 8.6: Presiones actuando en la base del muro. Caso a) ambas presiones son positivas. Caso b) σ_t es nula, y no existen tracciones.

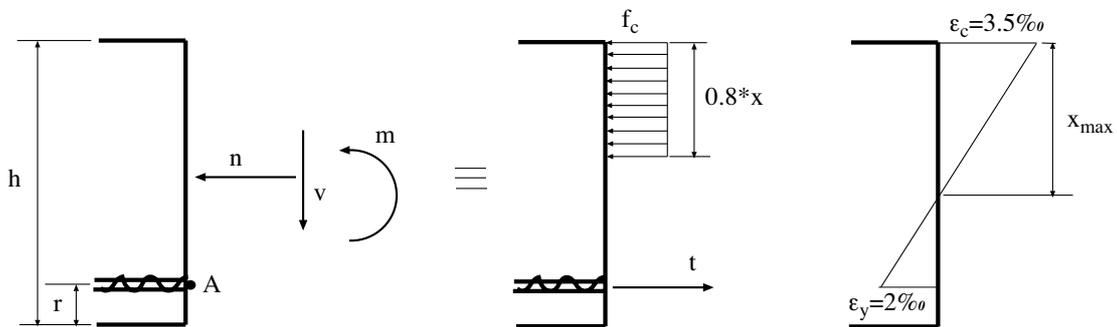


Figura 8.7: Ilustración del cálculo de las armaduras.

$$\begin{aligned}
 \sum M_A = 0 : \quad f_c 0,8x(h - r - 0,4x) &= m + n(h/2 - r) \\
 \sum F_H = 0 : \quad t &= f_c 0,8x - n \\
 \frac{A_s f_y}{t} &\geq F_k; \quad k = stem, toe, heel \\
 \frac{\tau_{max}}{v/(h - r)} &\geq F_j; \quad j = sstem, stoe, sheel
 \end{aligned} \tag{8.16}$$

Lo siguiente es particularizar para el alzado, la puntera y el talón, con lo que se obtiene:

Sección del alzado. De la figura 8.8(a) se obtiene

$$\begin{aligned}
 n_{stem} &= w_3 + w_4 + s_3 \\
 v_{stem} &= k_a q (h_1 + z_t) + k_a \gamma_s * (h_1 + z_t)^2 / 2 - k_p \gamma_s z_t^2 / 2 \\
 m_{stem} &= k_a \gamma_s (h_1 + z_t)^3 / 6 + k_a * q * (h_1 + z_t)^2 / 2 - k_p \gamma_s z_t^3 / 6 \\
 &\quad + n_{stem} (a + b/2) - (\sum_{i=3}^4 w_i x_{w_i} + s_3 x_{s_3}) \\
 h &= b
 \end{aligned} \tag{8.17}$$

Sección de la puntera. De la figura 8.8(b) se obtienen

$$\begin{aligned}
c_{aux} &= h_2 + a \tan \alpha \\
d_{aux} &= a / \cos \alpha \\
p_{aux} &= \gamma_c a (h_2 + c_{aux}) / 2 \\
\sigma_x &= \sigma_i + a(\sigma_t - \sigma_i) / (a + b + c) \\
n_{toe} &= k_p \gamma_s h_2 (z_t + h_2 / 2) + (\sin \alpha + \mu \cos \alpha) (\sigma_i + \sigma_x) d_{aux} / 2 \\
v_{toe} &= (\cos \alpha - \mu \sin \alpha) (\sigma_i + \sigma_x) d_{aux} / 2 - p_{aux} - s_1 \\
m_{toe} &= -a s_1 / 2 + k_p \gamma_s z_t h_2 (c_{aux} - 0,5 h_2) \\
&\quad + k_p \gamma_s h_2^2 (c_{aux} - 2 h_2 / 3) / 2 + \sigma_i d_{aux}^2 / 2 + (\sigma_x - \sigma_i) d_{aux}^2 / 3 \\
&\quad - n_{puntera} c_{aux} / 2 - \gamma_c a^2 h_2 / 2 - \gamma_c (c_{aux} - h_2) a^2 / 6 \\
h &= c_{aux}
\end{aligned} \tag{8.18}$$

Sección del talón. La figura 8.8(c) lleva a

$$\begin{aligned}
c_{aux_2} &= h_2 + (a + b) \tan \alpha \\
d_{aux_2} &= c / \cos \alpha \\
p_{aux_2} &= \gamma_c c (h_3 + c_{aux_2}) / 2 \\
\sigma_{x_2} &= \sigma_i + (a + b) (\sigma_t - \sigma_i) / (a + b + c) \\
n_{heel} &= k_a \gamma_s h_3 (h_1 + z_t + q / \gamma_s + h_3 / 2) - (\sin \alpha + \mu \cos \alpha) (\sigma_i + \sigma_{x_2}) d_{aux_2} / 2 \\
v_{heel} &= -(\cos \alpha - \mu \sin \alpha) (\sigma_i + \sigma_{x_2}) d_{aux_2} / 2 + p_{aux_2} - s_2 \\
m_{heel} &= s_2 c / 2 - k_a \gamma_s (h_1 + z_t + q / \gamma_s) h_3 (c_{aux_2} - h_3 / 2) \\
&\quad - 0,5 k_a \gamma_s h_3^2 (c_{aux_2} - 2 h_3 / 3) - \sigma_t d_{aux_2}^2 / 2 \\
&\quad - 0,5 (\sigma_{x_2} - \sigma_t) d_{aux_2}^2 / 3 + n_{heel} c_{aux_2} / 2 \\
&\quad + \gamma_c c^2 a u x_2 / 2 + \gamma_c (h_3 - c_{aux_2}) c^2 / 2 \\
h &= c_{aux_2}
\end{aligned} \tag{8.19}$$

Reemplazando estos valores en (8.16) se obtienen las secciones transversales de armadura necesarias para el alzado, A_{stem} , la puntera, A_{toe} , y el talón, A_{heel} .

Razones constructivas. Estas restricciones se deben a motivos constructivos, ya que el proceso de optimización tiende a que los espesores en la puntera y en lo alto del alzado sean nulos.

$$d \geq 0,3 \tag{8.20}$$

$$z_t \geq 0,3 \tag{8.21}$$

8.1.6. Función objetivo

En esta sección se calcula el coste total del muro por metro lineal, incluyendo coste de hormigón, acero, excavación y encofrados:

$$Cost = h(\bar{\mathbf{d}}, \tilde{\boldsymbol{\eta}}) = v_c c_c + s_t c_t + w_{st} c_{st} + v_{ex} c_{ex}$$

Como éste es un ejemplo ilustrativo, y para mayor simplicidad, no se considera la vida útil del muro, ni los costes de reparación y mantenimiento.

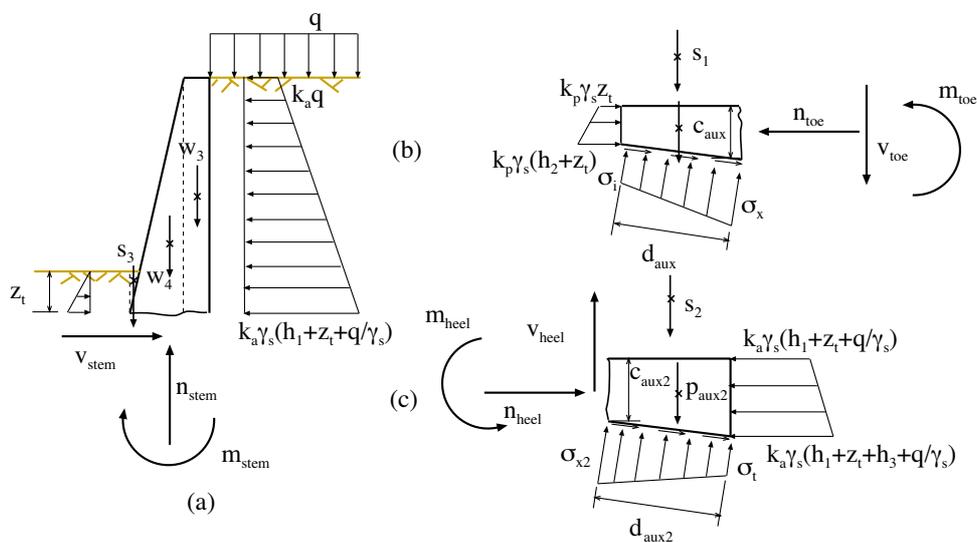


Figura 8.8: Ilustración de las fuerzas que intervienen en el cálculo de las armaduras en: (a) la sección crítica del alzado, (b) sección crítica de la puntera y (c) en la sección crítica del talón.

Para tal fin, se deben calcular los volúmenes de hormigón, v_c , excavación, v_{ex} , la superficie total de encofrado, s_t , y el peso total de acero para las armaduras, w_{st} .

$$\begin{aligned}
 v_c &= w/\gamma_c \\
 s_t &= h_2 + h_3 + h_1 + z_t + \sqrt{(b-d)^2 + h_1^2} \\
 w_{st} &= \gamma_{st} (A_1(h_1 + z_t + c_{aux2} + 0,5) + A_2(d_{aux} + d_{aux2} + d_{aux3}) + A_3(a + b + c)) \\
 &\quad + (h_2 + h_3 + d + \sqrt{(b-d)^2 + (h_1 + z_t)^2} + 4)\pi\phi_t^2\gamma_{st}/(4s_t) + \phi_t^2\gamma_{st}/(4s_t)(h_2 + \\
 &\quad + \sqrt{(b-d)^2 + (h_1 + z_t)^2} + d + h_1 + z_t + c + h_3 + d_{aux} + d_{aux2} + d_{aux3} + a) \\
 v_{ex} &= v_c + (h_1 + z_t)c + z_t a + (h_1 + z_t + h_3)^2/2 + (h_2 + z_t)^2/2
 \end{aligned} \tag{8.22}$$

donde $\gamma_{st} = 78,5kN/m^3$.

8.1.7. Distribuciones estadísticas del modelo

El diseño de un muro mediante métodos de Nivel II y III requiere la definición de las propiedades estadísticas de las variables que intervienen. En este ejemplo todas las variables, geométricas, cargas externas, y definiciones de material se toman como normales e independientes, cuyos valores de diseño se corresponden con sus medias, a las que se hará referencia con una barra sobre la variable correspondiente, y con las desviaciones típicas mostradas en la tabla 8.1. Se estará empleando, por tanto el método FOSM descrito en la sección 2.6.

Para mayor simplicidad, en este ejemplo, el siguiente conjunto de variables se asumirá determinista:

$$\{r, \phi_\ell, \phi_t, s_\ell, s_t, c_c, c_{st}, c_t, c_{ex}\}$$

Cuadro 8.1: Distribución estadística de las variables del ejemplo del muro.

Tipo	Variable	Desviación típica	Tipo	Variable	Desviación típica
Variables geométricas	a	$0,025m$	Resistencias	f_c	$3MPa$
	b	$0,025m$		f_y	$22MPa$
	c	$0,025m$		σ_{soil}	$0,25MPa$
	d	$0,025m$		τ_{max}	$0,04MPa$
	z_t	$0,025m$		Pesos específicos	γ_c
	h_1	$0,025m$	γ_s		$2kN/m^3$
	h_2	$0,025m$	γ_{st}		$0,2kN/m^3$
	h_3	$0,025m$	Otras variables	k_a	$0,05$
	A_{stem}	$0,00001m^2$		k_p	$0,1$
	A_{toe}	$0,00001m^2$		ν_{crit}	$0,05$
A_{heel}	$0,00001m^2$	q		$8kN/m$	

8.1.8. Solución numérica y discusión de los resultados

Supóngase el siguiente muro vertical:

$$\begin{array}{lllll}
 \bar{h}_1 = 5m; & \bar{\gamma}_c = 25kN/m^3; & \bar{\gamma}_s = 20kN/m^3; & \bar{f}_c = 30MPa; & \bar{f}_y = 450MPa; \\
 \bar{k}_a = 0,5; & \bar{k}_p = 3; & \bar{\nu}_{crit} = 0,5; & \bar{\sigma}_{soil} = 0,25MPa; & \bar{q} = 40kN/m; \\
 r = 0,05m; & F_t^0 = 1,2; & F_s^0 = 1,15; & F_b^0 = 1,2; & F_{stem}^0 = 1,4; \\
 F_{toe}^0 = 1,4; & F_{heel}^0 = 1,4; & F_{sstem}^0 = 1,2; & F_{stoe}^0 = 1,2; & F_{sheel}^0 = 1,2; \\
 c_c = 66euro/m^3; & c_{st} = 0,06euro/N; & c_t = 12euro/m^3; & c_{ex} = 3,6euro/m^3; & \tau_{max} = 0,4MPa,
 \end{array}$$

donde éstos son los datos elegidos por el diseñador.

El ejemplo propuesto ha sido implementado en GAMS (General Algebraic Modeling System) (véase Castillo, Conejo, Pedregal, García and Alguacil [29]).

La tabla 8.2 muestra la convergencia del método, que es alcanzada tras 11 iteraciones. La última columna de la tabla muestra los valores de diseño óptimos de las variables de diseño $a, b, c, d, h_2, h_3, z_t, A_{stem}, A_{toe}$ y A_{heel} , junto con los coeficientes de seguridad y los correspondientes valores del índice de fiabilidad β . El diseño se realizó garantizando los siguientes valores de los coeficientes de seguridad clásicos $F_t \geq 2,0; F_s \geq 2,0; F_b \geq 2,0; F_{stem} \geq 1,3; F_{toe} \geq 1,3; F_{heel} \geq 1,3; F_{sstem} \geq 1,4; F_{stoe} \geq 1,4; F_{sheel} \geq 1,4$ y $\beta_t, \beta_s, \beta_b, \beta_{stem}, \beta_{toe}, \beta_{heel}, \beta_{sstem}, \beta_{stoe}$ y β_{sheel} mayores o iguales a $\beta_i^0 = 3,71$. Los valores activos aparecen subrayados en la tabla 8.2.

De los resultados se pueden obtener las siguientes conclusiones:

1. El proceso converge en 11 iteraciones, pero prácticamente se obtienen los mismos resultados a partir de la iteración 5.
2. El coeficiente de seguridad F_s^0 es activo, es decir, es más restrictivo que su correspondiente probabilidad de fallo. Nótese que la probabilidad de fallo para este modo es mayor que $\beta_s^0 = 3,719$.
3. Las cotas probabilistas $\beta_b^0, \beta_{stem}^0, \beta_{toe}^0, \beta_{heel}^0, \beta_{sstem}^0, \beta_{stoe}^0, \beta_{sheel}^0$ son activas, es decir, son más restrictivas que las asociadas a los coeficientes de seguridad.

Cuadro 8.2: Ilustración del proceso iterativo. Los valores finales están en negrita.

		ITERACIONES				
Variable	Unidades	1	2	5	10	11 (fin)
Cost	<i>euro</i>	1105.2	1246.4	1280.5	1282.8	1282.8
h_1	<i>m</i>	5.00	5.00	5.00	5.00	5.00
z_t	<i>m</i>	0.30	0.30	0.30	0.30	0.30
a	<i>m</i>	1.55	1.72	1.80	1.81	1.81
b	<i>m</i>	0.90	1.15	1.23	1.23	1.23
c	<i>m</i>	4.83	4.23	3.98	3.97	3.97
d	<i>m</i>	0.30	0.30	0.30	0.30	0.30
h_2	<i>m</i>	0.50	0.60	0.62	0.62	0.62
h_3	<i>m</i>	1.04	1.38	1.51	1.52	1.52
A_{alzado}	m^2	0.00166	0.00167	0.00159	0.00158	0.00158
$A_{puntera}$	m^2	0.00044	0.00042	0.00037	0.00037	0.00037
A_{heel}	m^2	0.00180	0.00161	0.00143	0.00142	0.00142
F_t	–	6.45	6.05	5.95	5.96	5.96
F_s	–	2.00	2.00	2.00	2.00	2.00
F_b	–	2.00	2.00	2.01	2.02	2.02
F_{stem}	–	1.30	1.79	1.86	1.86	1.86
$F_{puntera}$	–	1.30	1.63	1.49	1.50	1.50
F_{heel}	–	1.30	1.81	1.89	1.89	1.89
F_{sstem}	–	1.40	1.80	1.93	1.94	1.94
F_{stoe}	–	1.40	1.74	1.82	1.82	1.82
F_{sheel}	–	1.40	1.79	1.93	1.94	1.94
β_t	–	–	24.63	24.12	24.13	24.13
β_s	–	–	3.87	3.80	3.79	3.79
β_b	–	–	3.71	3.71	3.72	3.72
β_{stem}	–	–	3.50	3.71	3.72	3.72
β_{toe}	–	–	4.44	3.68	3.72	3.72
β_{heel}	–	–	3.45	3.71	3.72	3.72
β_{sstem}	–	–	3.33	3.70	3.72	3.72
β_{stoe}	–	–	3.48	3.71	3.72	3.72
β_{sheel}	–	–	3.31	3.70	3.72	3.72

Cuadro 8.3: Sensibilidades con respecto a los datos del problema.

c_c	c_t	c_{st}	c_{ex}	r	ϕ_t
11.531	12.815	2726.431	56.756	738.240	3.668
ϕ_t	s_l	s_t	F_t	F_s	F_b
5.245	-110.042	-157.347	0.000	193.519	55.568
F_{alzado}	F_{toe}	F_{heel}	F_{sstem}	F_{stoe}	F_{sheel}
27.290	8.298	24.804	1.432	160.687	129.427
$\bar{\gamma}_c$	$\bar{\gamma}_s$	$\bar{\gamma}_{st}$	\bar{f}_c	\bar{f}_y	$\bar{\sigma}_{soil}$
-5.593	22.063	2.084	-0.024	-0.245	-448.275
$\bar{\tau}_{max}$	$\bar{\mu}_{crit}$	\bar{q}	\bar{k}_a	\bar{k}_p	\bar{h}_1
-1364.251	-774.074	11.679	2495.998	-18.428	490.769

4. El coeficiente de seguridad mínimo F_t^0 y su correspondiente cota probabilista β_t^0 son ambas inactivas. Las restricciones relativas a los demás modos de fallo hacen que se cumplan éstas. Nótese que su coeficiente de seguridad y su índice de fiabilidad son mayores que las cotas inferiores.
5. Los valores óptimos para d y z_t son $d = 0,3$ y $z_t = 0,3$. Esto implica que las restricciones (8.20) y (8.21) son activas. En otras palabras, se puede obtener un menor coste eliminando estas condiciones, entonces la solución óptima sería $d = z_t = 0$.

8.1.9. Análisis de sensibilidad

Las sensibilidades para el ejemplo numérico se dan en las Tablas 8.3, 8.4 and 8.5, respectivamente.

La tabla 8.3 da las sensibilidades de la solución óptima con respecto a los datos, con lo cual se sabe cómo cambia la función objetivo (coste de construcción óptimo) cuando el valor del dato únicamente aumenta en una pequeña cantidad. Esta información es extremadamente útil durante el proceso de construcción para controlar el coste, y para analizar cómo los cambios en los datos afectan al mismo. Entre ellos se tiene la influencia del coste de los materiales, la influencia de los coeficientes de seguridad, etc. Así por ejemplo, un cambio de un euro en el coste por metro cúbico de hormigón (c_c) conlleva un incremento de coste de construcción de 11,531 euro (véase la casilla correspondiente en la tabla 8.3). De forma similar, un aumento en el límite inferior del coeficiente de seguridad F_t^0 no afecta al coste, ya que en el óptimo no es activa la restricción correspondiente (8.10), pero un aumento del límite inferior del coeficiente de seguridad F_s^0 supone un aumento de coste de 193,519 euro por unidad de aumento.

Es importante resaltar que el estudio de sensibilidad tiene carácter local, es decir, que sólo vale en el entorno de la solución, ya que grandes aumentos en alguno de los parámetros, por ejemplo en F_t^0 puede suponer que en el nuevo valor óptimo la restricción (8.10) se active, con lo que el anterior análisis de sensibilidad no valdría.

Cuadro 8.4: Sensibilidades $\frac{\partial \beta_i}{\partial x}$, con respecto a los datos x , en el ejemplo del muro.

Dato x	$\frac{\partial \beta_t}{\partial x}$	$\frac{\partial \beta_s}{\partial x}$	$\frac{\partial \beta_b}{\partial x}$	$\frac{\partial \beta_{stem}}{\partial x}$	$\frac{\partial \beta_{toe}}{\partial x}$	$\frac{\partial \beta_{heel}}{\partial x}$	$\frac{\partial \beta_{sstem}}{\partial x}$	$\frac{\partial \beta_{stoe}}{\partial x}$	$\frac{\partial \beta_{sheel}}{\partial x}$
r	0.00	0.00	0.00	-5.93	-12.34	-7.10	-4.59	-7.13	-5.67
ϕ_l	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
ϕ_t	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
s_l	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
s_t	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
μ_{h_1}	-6.13	-0.95	-1.55	-3.26	-3.27	-3.12	-1.56	-1.95	-1.83
μ_a	4.65	-0.06	1.89	0.00	-7.99	2.17	0.00	0.04	0.75
μ_b	5.33	0.38	1.36	6.98	2.33	2.39	4.59	1.34	1.10
μ_c	6.49	1.07	0.68	0.00	-0.54	-1.21	0.00	0.35	0.12
μ_d	0.79	0.49	-0.52	0.34	-2.02	0.37	0.00	-0.72	0.46
μ_{h_2}	-6.49	-0.91	-1.27	0.00	18.44	2.38	0.00	4.48	2.38
μ_{h_3}	2.75	1.34	-0.75	0.00	4.17	2.95	0.00	1.15	1.75
μ_{z_t}	-6.09	0.17	-1.84	-3.24	-1.61	-3.04	-1.25	-1.42	-1.57
$\mu_{A_{stem}}$	0.00	0.00	0.00	4261.54	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
$\mu_{A_{toe}}$	0.00	0.00	0.00	0.00	25649.34	0.00	0.00	0.00	0.00
$\mu_{A_{heel}}$	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	4671.60	0.00	0.00	0.00
μ_{γ_c}	0.25	0.09	-0.05	0.03	-0.14	0.03	0.00	-0.04	0.03
μ_{γ_s}	0.19	-0.03	-0.07	-0.14	-0.11	-0.13	-0.13	-0.10	-0.14
$\mu_{\gamma_{st}}$	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
μ_{f_c}	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
μ_{f_y}	0.00	0.00	0.00	0.02	0.02	0.02	0.00	0.00	0.00
$\mu_{\sigma_{soil}}$	0.00	0.00	29.03	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
$\mu_{\tau_{max}}$	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	18.53	20.16	18.70
$\mu_{\mu_{crit}}$	0.00	15.09	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
μ_q	-0.05	-0.03	-0.04	-0.08	-0.07	-0.08	-0.05	-0.05	-0.06
μ_{k_a}	-14.44	-11.84	-7.02	-12.24	-4.75	-12.71	-9.24	-7.61	-7.76
μ_{k_p}	0.00	0.13	0.03	0.00	0.12	0.03	0.02	0.03	0.03
σ_{h_1}	-22.70	-0.08	-0.22	-0.99	-0.99	-0.91	-0.23	-0.35	-0.31
σ_{z_t}	-22.36	0.00	-0.32	-0.97	-0.24	-0.86	-0.14	-0.19	-0.23
σ_a	-13.05	0.00	-0.33	0.00	-5.94	-0.44	0.00	0.00	-0.05
σ_b	-17.16	-0.01	-0.17	-4.53	-0.51	-0.53	-1.96	-0.17	-0.11
σ_c	-25.40	-0.11	-0.04	0.00	-0.03	-0.14	0.00	-0.01	0.00
σ_d	-0.37	-0.02	-0.03	-0.01	-0.38	-0.01	0.00	-0.05	-0.02
σ_{h_2}	-25.43	-0.08	-0.15	0.00	-31.62	-0.53	0.00	-1.86	-0.53
σ_{h_3}	-4.58	-0.17	-0.05	0.00	-1.62	-0.81	0.00	-0.12	-0.29
$\sigma_{A_{stem}}$	0.00	0.00	0.00	-675.39	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
$\sigma_{A_{toe}}$	0.00	0.00	0.00	0.00	-24465.36	0.00	0.00	0.00	0.00
$\sigma_{A_{heel}}$	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	-811.61	0.00	0.00	0.00
σ_{γ_c}	-1.46	-0.03	-0.01	0.00	-0.07	0.00	0.00	-0.01	0.00
σ_{γ_s}	-1.68	-0.01	-0.03	-0.14	-0.09	-0.13	-0.12	-0.07	-0.16
$\sigma_{\gamma_{st}}$	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
σ_{f_c}	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
σ_{f_y}	0.00	0.00	0.00	-0.02	-0.04	-0.02	0.00	0.00	0.00
σ_{σ_s}	0.00	0.00	-94.03	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
σ_{τ_m}	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	-51.05	-60.43	-52.02
$\sigma_{\mu_{cr}}$	0.00	-43.23	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
σ_q	-0.43	-0.03	-0.04	-0.18	-0.13	-0.17	-0.07	-0.07	-0.09
σ_{k_a}	-251.42	-26.61	-9.16	-27.85	-4.20	-30.02	-15.89	-10.77	-11.21
σ_{k_p}	0.00	-0.01	0.00	0.00	-0.01	0.00	0.00	0.00	0.00

Cuadro 8.6: Ilustración de la simulación de Monte Carlo.

<i>Modo</i>	$P_f(\times 10^{-4})$	β_{FOSM}	β_{MC}
β_t	0.0000	24.127	$-\infty$
β_s	0.6893	3.794	-3.812
β_b	0.9934	3.719	-3.721
β_{stem}	0.9428	3.719	3.734
β_{toe}	0.8399	3.719	3.763
β_{heel}	0.9397	3.719	3.735
β_{sstem}	1.0117	3.719	3.716
β_{stoe}	1.0135	3.719	3.716
β_{sheel}	1.0269	3.719	3.712
β_{tot}	4.9208	-	3.295

La tabla 8.4 da las sensibilidades de los índices de fiabilidad (β) con respecto a los datos, y a los parámetros que definen las distribuciones estadísticas de las variables aleatorias (medias y desviaciones típicas). Se puede por tanto analizar cómo influyen todos esos parámetros en la fiabilidad y por tanto en la seguridad de cada uno de los modos de fallo. Con lo cual se sabe que datos o parámetros influyen más en cada uno de los modos de fallo y se podrá actuar en consecuencia. Con esta tabla, el ingeniero puede analizar cómo influye, por ejemplo, la calidad del material (desviación típica en f_c o f_y) o la precisión en la construcción (desviación típica en las dimensiones de diseño) en la seguridad del muro.

Si se prefieren valores no dimensionales de las sensibilidades se puede reemplazar el valor $\frac{\partial \beta_t}{\partial x}$ por $\frac{\bar{x} \partial \beta_t}{\partial x}$ en la tabla 8.4 y obtener la tabla 8.5.

8.1.10. Simulación de Monte Carlo

Para determinar la probabilidad de fallo de cada uno de los modos de rotura, así como la probabilidad de fallo global, se ha realizado una simulación de Monte Carlo con 10^8 réplicas. Habida cuenta del gran número de modos de fallo, y pese a ser un sistema en serie, no se han calculado las probabilidades de las intersecciones ya que ascenderían a $2^8 - 1 = 511$.

Se puede concluir que la probabilidad de fallo global del muro es de 0,00049208, mientras que las probabilidades de fallo de cada uno de los modos de rotura, junto con los índices de fiabilidad aproximados mediante FOSM (β_{FOSM}) y los equivalentes de la simulación de Monte Carlo ($\beta_{MC} = \Phi^{-1}(1 - P_f)$) se encuentran en la tabla 8.6.

8.2. Viga Mixta

En esta sección se describe con detalle el cálculo de una viga mixta perteneciente al tablero de un puente biapoyado basado en técnicas probabilistas.

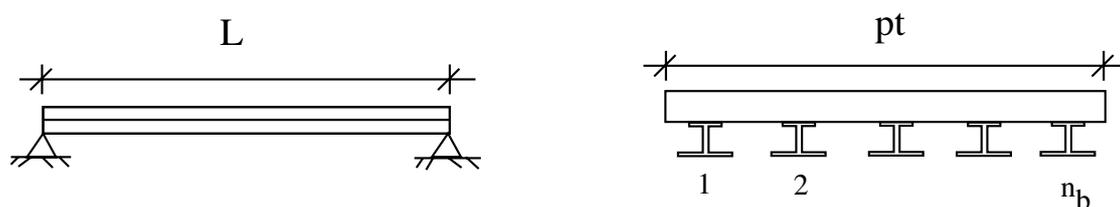


Figura 8.9: Puente mixto biapoyado utilizado en el Ejemplo.

8.2.1. El problema de la viga mixta

Para ilustrar los conceptos que se presentarán en las secciones siguientes, se usará el ejemplo de una viga mixta simplemente apoyada (véanse las Figuras 8.9 y 8.10), con una geometría dada (nótese que está paramétricamente definida). No obstante, se clarifica al lector que el objetivo del presente ejemplo es ilustrar conceptos y no realizar un análisis exhaustivo de todos los posibles modos de fallo de la viga (que los árboles no escondan al bosque).

Las vigas mixtas tienen un uso muy extendido en la construcción de puentes, plantas comerciales, etc. Con su utilización, se pretende reemplazar en las zonas de compresión el acero, que es un material caro, por hormigón armado, que es más barato. Para ello la losa de hormigón se une al ala superior de la viga de acero mediante conectores.

El diseño de una viga mixta requiere seleccionar los siguientes parámetros: espesores de chapa de la viga mixta, espaciado entre vigas, espesor y posición de los rigidizadores, número y dimensiones de los conectores, etc.

Para facilitar la descripción del problema, se considera el siguiente conjunto de índices:

e : Localizaciones: $\{c = \text{losa de hormigón}, u = \text{ala superior}, l = \text{ala inferior}\}$

t : Periodos de tiempo considerados: $\{0, \infty\}$.

p : Posiciones longitudinales en el puente: $\{c = \text{centro de vano}, s = \text{apoyo}\}$

En este ejemplo, no se discute el método usado para la selección de los índices de fiabilidad (β), existen en la literatura amplias discusiones acerca de este tema (Royal Society Study Group [145], Blockley [20], Rowe [141] y Stewart y Melchers [157]).

Independientemente del método elegido para diseñar, el primer paso es seleccionar los modos de fallo o estados límites. En este ejemplo se considerarán los siguientes:

1. **Estado límite de servicio.**

- Flecha máxima en centro luz.

2. **Estado límite de daño.**

- Deformaciones plásticas locales en el hormigón a tiempo 0 y ∞ .

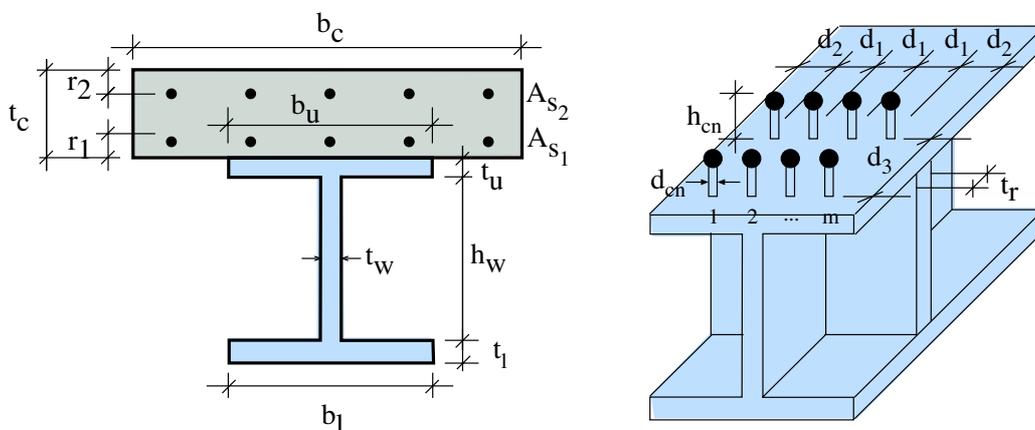


Figura 8.10: Definición geométrica de la viga mixta.

- Deformaciones plásticas locales en las alas superiores e inferiores de la viga de acero a tiempo 0 y ∞ .
- Deformaciones plásticas locales en el alma de acero.

3. Estado límite último.

- Momento último resistido por la sección.
- Esfuerzo cortante último resistido por la sección.

Las ecuaciones de estado límite se obtendrán en la subsección 8.2.2.

Al igual que en la sección anterior (8.1), y dado que se va a emplear el método PSFM, se va a clasificar las variables que intervienen. El conjunto de variables de diseño (X_1, \dots, X_n) se dividirá de forma más detallada que en el ejemplo anterior en cinco subconjuntos (véase la subsección 8.2.9 para la notación):

d: Variables de diseño optimizadas.

$$\mathbf{d} = (b_e, t_e, h_w, t_w, d_1, d_2, d_3, A_{s_1}, A_{s_2}, h_{st}, t_r)$$

η : Conjunto de parámetros.

$$\boldsymbol{\eta} = (L, pl, d_{st}, r_1, r_2, n_b, m, E_t, E_s, \phi, \nu, e_p, e_s, c_c, c_s, c_y, c_{st})$$

ϕ : Variables aleatorias básicas usadas en los modelos probabilistas.

$$\boldsymbol{\phi} = (f_c, f_s, f_y, \gamma_c, \gamma_s, w_d, w_p, p_s)$$

κ : Parámetros estadísticos.

$$\boldsymbol{\kappa} = (\mu_{w_d}, \mu_{w_p}, \mu_{p_s}, \mu_{f_c}, \mu_{f_s}, \mu_{f_y}, \mu_{\gamma_c}, \mu_{\gamma_s}, \nu_{w_d}, \nu_{w_p}, \nu_{p_s}, \nu_{f_c}, \nu_{f_s}, \nu_{f_y}, \nu_{\gamma_c}, \nu_{\gamma_s})$$

ψ : Variables auxiliares o no básicas.

$$\psi = (V_p, \sigma_{e,t}, \tau_p, M_p, M_{un}, V_{max}, w_1, l_d, C_p, s_u, V_t, A_{e,t}, A_w, I_t, I_s, I_r, Y_e, Y_w, EI_t, \delta_t, \delta, \delta_{max}, A_{min}, e_{max}, C_{un}, T_{un}, X_{un}, \tau_{cr}, \lambda_w, m_t, \tau_{max}, P_{stc}, P_{st}, N_{cs})$$

donde

$$e \in \{c, u, l\}; \quad t \in \{0, \infty\}; \quad p \in \{c, s\}.$$

8.2.2. Restricciones

Para el diseño de la viga mixta se han de considerar, entre otras, las siguientes restricciones:

1. Restricciones geométricas e impuestas por el código.
2. Restricciones asociadas a la probabilidad de fallo (una por cada modo de fallo).
3. Restricciones asociadas a los coeficientes de seguridad. Están asociadas a cada uno de los modos de fallo que se consideran (estados límites de servicio, daño y último).
 - a) **Estado límite de daño del hormigón a tiempo 0 y ∞ .** El análisis de este modo de fallo se puede hacer considerando el ratio resistencia, esfuerzos actuantes

$$\frac{f_c}{\sigma_{c,t}} = \frac{f_c}{\frac{M_c V_t E_t}{EI_t}} \geq F_{ct}; \quad t \in \{0, \infty\} \quad (8.23)$$

donde F_{c0} y $F_{c\infty}$ son los coeficientes de seguridad asociados a cada una de las condiciones.

- b) **Estado límite de daño de las alas superior e inferior de la viga de acero a tiempo 0 y ∞ .** Se considera el ratio resistencia, esfuerzos actuantes

$$\frac{f_y}{\sqrt{\sigma_{u,t}^2 + 3\tau_c^2}} \geq F_{ut}; \quad t \in \{0, \infty\} \quad (8.24)$$

y

$$\frac{f_y}{\sqrt{\sigma_{\ell,t}^2 + 3\tau_c^2}} \geq F_{\ell t}; \quad t \in \{0, \infty\} \quad (8.25)$$

donde F_{u0} , $F_{u\infty}$, $F_{\ell 0}$ y $F_{\ell \infty}$ son los coeficientes de seguridad asociados con estas condiciones.

- c) **Estado límite de daño del alma de acero.** En este caso se considera el ratio resistencia cortante de acero, esfuerzo cortante actuante

$$\frac{f_y}{\sqrt{3}\tau_s^2} = \frac{f_y}{\frac{V_s\sqrt{3}}{h_w t_w}} \geq F_w \quad (8.26)$$

donde F_w es el coeficiente de seguridad correspondiente.

- d) **Estado límite último asociado al máximo momento flector resistido por la sección.** El análisis de este modo de fallo se puede hacer considerando el ratio máximo momento que resiste la sección, momento actuante

$$\frac{M_{un}}{M_c} \geq F_m \quad (8.27)$$

donde F_m es el coeficiente de seguridad asociado a este modo de fallo.

- e) **Estado límite último asociado al máximo esfuerzo cortante resistido por la sección.** El análisis de este modo de fallo se puede hacer considerando el ratio máximo esfuerzo cortante que resiste la sección, esfuerzo cortante actuante

$$\frac{V_{max}}{V_s} \geq F_v \quad (8.28)$$

donde F_v es el coeficiente de seguridad asociado a este modo de fallo.

- f) **Estado límite de servicio de la máxima flecha en centro vano.** El análisis se puede hacer considerando el ratio máxima flecha permitida, flecha existente

$$\frac{\delta_{max}}{\delta} \geq F_\delta \quad (8.29)$$

donde F_δ es el coeficiente de seguridad asociado a esta condición.

Dado que se tienen 10 modos de fallo diferentes, se define el conjunto I_f de modos de fallo como

$$I_f = \{\delta, c_0, c_\infty, u_0, u_\infty, \ell_0, \ell_\infty, w, m, v\}$$

La viga se considerará válida si los coeficientes de seguridad $F_\delta, F_{c_0}, F_{c_\infty}, F_{u_0}, F_{u_\infty}, F_{\ell_0}, F_{\ell_\infty}, F_w, F_m$ y F_v son mayores que los valores mínimos requeridos.

Todos estos modos de fallo están correlacionados porque tienen agentes comunes. Estas correlaciones se observarán en la simulación de Monte Carlo en la subsección 8.2.7.

Obsérvese que sólo se han considerado los modos de fallo más relevantes, pero hay otros posibles; sin embargo, han sido ignorados por motivos de claridad.

8.2.3. Función a optimizar

En esta sección se calcula el coste total de construcción de la viga. Dado que se trata de un ejemplo ilustrativo y con propósito de no complicar el problema en exceso, no se considera el coste a largo plazo, ni mantenimiento, ni reparaciones.

Por tanto, se necesita calcular el peso total de hormigón y acero, así como el número de conectores por unidad de longitud, y los rigidizadores del alma.

$$\begin{aligned}
 Coste = & 1000\gamma_s \left[b_u t_u \left(c_y + \frac{2,404 \times 10^{-9}}{(0,04 - t_u)^4} \right) + b_\ell t_\ell \left(c_y + \frac{2,404 \times 10^{-9}}{(0,04 - t_\ell)^4} \right) \right] \\
 & + 1000\gamma_s \left[h_w t_w \left(c_y + \frac{2,404 \times 10^{-9}}{(0,04 - t_w)^4} \right) + t_r h_w (b_\ell - t_w) \left(c_y + \frac{2,404 \times 10^{-9}}{(0,04 - t_r)^4} \right) \right] \\
 & + 1000c_s \gamma_s (A_{s_1} + A_{s_2}) + c_{st} \frac{m}{d_3} + c_c b_c t_c (b_c - b_\ell)^2
 \end{aligned} \tag{8.30}$$

Como puede observarse en la ecuación (8.30) el precio del acero tiene una penalización en función del espesor, de tal forma que a mayores espesores, mayor coste. De esta manera se tiene en cuenta el aumento de coste en manipular y cortar las chapas.

8.2.4. Distribuciones estadísticas del modelo

Diseñar con métodos de nivel II y III implica la definición de las propiedades estadísticas de las variables aleatorias que intervienen.

Todas las variables estocásticas son independientes, así la transformación de Rosenblatt es muy simple. La independencia entre los parámetros geométricos, las propiedades mecánicas y las físicas es natural porque proceden de distintas fuentes. La hipótesis de independencia entre las variables relativas a diferentes materiales parámetros geométricos es también bastante realista, aunque no supondría ningún problema para el modelo considerar la dependencia entre determinadas variables.

Es importante recalcar que la correlación entre los diferentes modos de fallo proviene del hecho de que tienen variables comunes. Así, aunque las variables se consideren independientes, los modos de fallo podrán estar correlacionados. En otras palabras, la principal fuente de correlación entre modos de fallo procede de la dependencia en variables comunes y no de la dependencia de las variables en sí mismas.

Las hipótesis de las distribuciones son:

1. **Parámetros geométricos.** Las variables de diseño $b_u, b_\ell, t_u, t_\ell, h_w, t_w, d_1, d_2, d_3, A_{s_1}, A_{s_2}, h_{st}$ y t_r) se consideran deterministas e iguales a los valores de diseño clásicos (con probabilidad uno). Esto se debe al alto control al que se someten estas variables durante la construcción.

Las variables de diseño b_c y t_c se consideran normalmente distribuidas con media igual al valor clásico y desviaciones típicas de 0,01 m y 0,005 m, respectivamente. Se asume que el control sobre los elementos de hormigón es menor que el de las piezas de acero.

2. **Propiedades mecánicas de los materiales.** La resistencia del hormigón, f_c , y las resistencias del acero, f_s y f_y , se toman como normalmente distribuidas. Sus valores medios se calculan a partir de los valores característicos f_{ck} , f_{sk} y f_{yk} , y de sus coeficientes de variación v_{f_c} , v_{f_s} y v_{f_y} (hay una probabilidad 0,95 de que el valor real sea mayor que el característico), respectivamente:

$$\begin{aligned}\mu_{f_c} &= \frac{f_{ck}}{1 - 1,64v_{f_c}} = f_{ck} + 8, \\ \mu_{f_s} &= \frac{f_{sk}}{1 - 1,64v_{f_s}}, \\ \mu_{f_y} &= \frac{f_{yk}}{1 - 1,64v_{f_y}}.\end{aligned}$$

Las variables w_d , w_p y p_s se suponen normales independientes con valores medios dados μ_{w_d} , μ_{w_p} y μ_{p_s} , y coeficientes de variación v_{w_d} , v_{w_p} y v_{p_s} , respectivamente. Todas estas variables toman sus valores característicos para el diseño clásico.

3. **Propiedades físicas del material.** Los pesos específicos del hormigón y del acero, γ_c y γ_s se consideran variables normales también. Sus medias y coeficientes de variación son μ_{γ_c} , μ_{γ_s} , v_{γ_c} y v_{γ_s} , respectivamente. Estas variables toman sus valores medios para el clásico.

8.2.5. Ejemplo numérico

El método propuesto en la sección 7.4 ha sido implementado en GAMS (General Algebraic Modeling System) (véase Castillo, Conejo, Pedregal, García y Alguacil [29]) para un ejemplo concreto. Considérese la siguiente viga mixta:

$$\begin{array}{llll} L = 30 \text{ m} & pl = 10 \text{ m} & e_p = 2 & e_s = 1,7 \\ E_s = 210000 \text{ MPa} & \phi = 2 & r_1 = 0,05 & r_2 = 0,05 \text{ m} \\ m = 4 & d_{st} = 0,02 \text{ m} & n_b = 4 & p_{sk} = 4 \text{ KN/m}^2 \\ w_{dk} = 40 \text{ KN/m} & w_{pk} = 600 \text{ KN} & \mu_{\gamma_c} = 25 \text{ KN/m}^3; & \mu_{\gamma_s} = 78,5 \text{ KN/m}^3; \\ \mu_{f_c} = 38 \text{ MPa} & f_{ck} = 30 \text{ MPa} & f_{sk} = 400 \text{ MPa} & f_{yk} = 235 \text{ MPa} \\ v_{p_s} = 0,3 & v_{w_d} = 0,2 & v_{w_p} = 0,3 & v_{\gamma_c} = 0,1 \\ v_{\gamma_s} = 0,01 & v_{f_y} = 0,03 & v_{f_s} = 0,04 & c_y = 0,24 \text{ euros/N} \\ c_s = 0,063 \text{ euros/N} & c_{st} = 1 \text{ euros} & c_c = 60,1 \text{ euros/m}^3 & \end{array}$$

donde todos estos valores son seleccionados por el diseñador.

Se han utilizado los siguientes límites inferiores para los coeficientes de seguridad y para los valores del índice de fiabilidad

$$F_\delta = 1,0; F_{c0} = F_{c\infty} = 1,15; F_{u0} = F_{u\infty} = 1,15; F_{l0} = F_{l\infty} = 1,15; F_w = 1,15; F_m = F_v = 1,3 \quad (8.31)$$

y

$$\beta_\delta = 2,58; \beta_{c0} = \beta_{c\infty} = \beta_{u0} = \beta_{u\infty} = \beta_{l0} = \beta_{l\infty} = \beta_w = 3,29; \beta_m = \beta_v = 3,72 \quad (8.32)$$

correspondientes a probabilidades de fallo de $0,5 \times 10^{-2}$, $0,5 \times 10^{-4}$ y 10^{-4} , respectivamente. Obsérvese que la ‘violación’ de los estados límites con mayores consecuencias negativas en caso de fallo están asociados a menores probabilidades de fallo.

La tabla 8.7 muestra la convergencia del método, que con la tolerancia exigida se alcanza tras 8 iteraciones. La columna de la primera iteración muestra los valores iniciales de las variables de diseño, los valores actuales de los coeficientes de seguridad y los valores de los índices de fiabilidad (β) asociados con el diseño óptimo para los coeficientes de seguridad en (8.31). Obsérvese que sólo las restricciones $F_\delta = 1,0$ y $F_{\ell\infty} = 1,15$ (en negrita en la tabla 8.7) son activas. Y que la restricción asociada a β_δ (en negrita en la tabla 8.7) no se satisface. Por tanto los límites inferiores de los coeficientes de seguridad son actualizados para la segunda iteración. Se pueden hacer comentarios similares para la segunda columna. En cambio, en la iteración 3 la restricción que no se satisface es la β_δ . Por lo tanto, se requieren más iteraciones hasta que la solución converge de forma que todas las restricciones se cumplen.

La última columna de la tabla muestra los valores óptimos de las variables

$$b_c, b_u, b_\ell, t_c, t_u, t_\ell, t_r, h_w, t_w, h_{st}, A_{s1}, A_{s2}, d_1, d_2, d_3,$$

junto con los coeficientes de seguridad y valores del índice de fiabilidad (β) asociados.

Los valores activos en la solución final aparecen subrayados en la tabla 8.7, de la cual se pueden extraer las siguientes conclusiones:

1. El proceso converge tras 8 iteraciones.
2. Se obtiene un listado con los coeficientes de seguridad reales y los índices de fiabilidad asociados a cada modo de fallo.
3. Únicamente el coeficiente de seguridad $F_{\ell\infty}$, es activo.
4. Debido a la restricción impuesta por el estado límite de servicio, el único límite probabilista activo es β_δ .
5. El diseño final (iteración 8) es más caro que el inicial, ya que el primero no satisfacía la restricción asociada al β_δ .

En la subsección 8.2.7 se puede obtener más información, ya que las restricciones activas están marcadas con el signo “●”.

8.2.6. Simulación.

Para estimar la probabilidad de fallo global de la estructura, comprender mejor la interacción y correlación entre los distintos modos de fallo, y estimar las probabilidades de fallo de cada combinación de modos de fallo, se ha realizado una simulación de Monte Carlo con 10^7 réplicas, determinándose las probabilidades de fallo de cada uno de los modos de fallo. Los resultados se presentan en la tabla 8.8.

La probabilidad de exceder la máxima flecha permitida en centro luz es $0,50564 \times 10^{-3}$, muy similar a la obtenida mediante la aproximación FORM. Las probabilidades asociadas a estado límite de daño y último son $1,7 \times 10^{-6}$ y 0, respectivamente. Cabe señalar que las situaciones en las que se producen daños, se excede siempre la máxima flecha permitida.

Cuadro 8.7: Ilustración del proceso iterativo. Los valores de diseño finales aparecen en negrita.

		ITERACIONES			
Variable	Unidades	1	2	3	8 (fin)
Coste	euros	1212.4	1218.2	1220.1	1221.1
b_c	m	2.500	2.500	2.500	2.500
b_u	m	0.441	0.442	0.442	0.442
b_l	m	0.441	0.442	0.442	0.442
t_c	cm	27.95	28.57	28.78	28.88
t_u	cm	0.88	0.88	0.88	0.88
t_l	cm	2.11	2.10	2.10	2.10
h_w	m	1.972	1.974	1.974	1.975
t_w	cm	1.60	1.61	1.61	1.61
h_{st}	cm	8.00	8.00	8.00	8.00
t_r	cm	0.80	0.80	0.80	0.80
As_1	cm ²	6.29	6.43	6.47	6.50
As_2	cm ²	6.29	6.43	6.47	6.50
d_1	cm	11.37	11.40	11.41	11.41
d_2	cm	5.00	5.00	5.00	5.00
d_3	cm	18.31	17.92	17.79	17.72
F_δ	–	1.00	1.01	1.01	1.02
F_{c0}	–	3.60	3.62	3.63	3.63
$F_{c\infty}$	–	4.86	4.90	4.91	4.92
F_{u0}	–	9.66	9.99	10.11	10.17
$F_{u\infty}$	–	3.05	3.12	3.14	3.15
F_{l0}	–	1.26	1.26	1.26	1.26
$F_{l\infty}$	–	1.15	1.15	1.15	<u>1.15</u>
F_w	–	4.18	4.16	4.16	4.15
F_m	–	1.80	1.80	1.80	1.80
F_v	–	2.63	2.62	2.62	2.62
β_δ	–	2.44	2.53	2.56	2.58
β_{c0}	–	6.40	6.41	6.41	6.41
$\beta_{c\infty}$	–	6.78	6.78	6.79	6.79
β_{u0}	–	29.18	29.36	29.42	29.44
$\beta_{u\infty}$	–	18.37	18.68	18.79	18.84
β_{l0}	–	5.82	5.82	5.82	5.82
$\beta_{l\infty}$	–	4.63	4.63	4.64	4.64
β_w	–	23.07	23.04	23.03	23.02
β_m	–	7.12	7.12	7.12	7.12
β_v	–	19.32	19.28	19.26	19.26

Cuadro 8.8: Resultados de la simulación de Monte Carlo para 10^7 realizaciones.

		Prob. of failure ($\times 10^{-4}$)	
Tipo de fallo	Frecuencia	Montecarlo	FORM
δ	50564	$0,50564 \times 10^{-3}$	$0,50011 \times 10^{-3}$
c_0	0	0	$7,152 \times 10^{-11}$
c_∞	0	0	$5,66658 \times 10^{-12}$
u_0	0	0	0
u_∞	0	0	0
l_0	0	0	$3,0018 \times 10^{-9}$
l_∞	17	$1,7 \times 10^{-6}$	$1,78201 \times 10^{-6}$
w	0	0	0
m	0	0	$5,5117 \times 10^{-13}$
v	0	0	0

Cuadro 8.9: Sensibilidades al coste con respecto a los datos en el ejemplo ilustrativo del muro.

d_{st}	L	r_1	r_2	pl	n_b	e_p	e_u	ϕ
-2257.21	25.73	0.00	0.00	79.28	-276.31	128.38	154.81	98.21
E_s	m	f_{ck}	f_{sk}	f_{yk}	c_y	c_s	c_{st}	c_c
98.21	0.00	0.36	0.00	0.45	4054.13	102.03	22.57	3.06
μ_{w_d}	μ_{p_s}	μ_{w_p}	μ_{f_c}	μ_{f_s}	μ_{f_y}	μ_{γ_c}	μ_{γ_s}	F_δ
1.85	98.26	0.64	-2.12	0.00	0.00	4.02	13.21	537.34
F_{c_0}	F_{c_∞}	F_{u_0}	F_{u_∞}	F_{l_0}	F_{l_∞}	F_w	F_m	F_v
0.00	0.00	0.00	-0.09	0.00	132.79	0.00	0.00	0.00

8.2.7. Estudio de sensibilidad en el ejemplo numérico

Las sensibilidades para el ejemplo numérico de la viga se dan en las tablas 8.9 y 8.10. La tabla 8.9 muestra las sensibilidades al coste asociadas al diseño clásico. Y nos permite conocer cómo influyen los cambios en los parámetros en el coste total óptimo de la viga mixta. Esta información es extremadamente útil durante el proceso de construcción para controlar el coste, y cómo influyen en el coste los coeficientes de seguridad globales. Por ejemplo, un cambio de un euro en el coste unitario c_s del acero, produce un incremento de coste de 102,03 euros por metro lineal de viga (véase la entrada correspondiente en la tabla 8.9). De forma similar, un incremento en el límite inferior del coeficiente de seguridad F_{c_0} no cambia el coste, lo cual es lógico ya que F_{c_0} no está activo en la solución final, y un incremento de una unidad en la longitud del puente supone un aumento de coste de 25,73 euros por metro lineal.

La tabla 8.10 muestra las sensibilidades asociadas a los valores de β . Es muy útil conocer la influencia de los parámetros en la seguridad asociada a cada uno de los modos de fallo,

y saber cómo varía el índice de fiabilidad cuando alguno de los parámetros cambia en una unidad. Con esta tabla, el diseñador puede analizar la influencia de la calidad de los materiales (reducidas desviaciones típicas en f_c o f_y) o la precisión en la determinación de las acciones de proyecto (reducidas desviaciones típicas en v_{p_s} o v_{w_p}) en la seguridad de la viga. Observese que un aumento en la dispersión de las variables (desviaciones típicas o coeficientes de variación) supone una disminución de los índices de fiabilidad β y por consiguiente un aumento de la probabilidad de fallo.

8.2.8. Restricciones del ejemplo de la viga

En este apartado se da una descripción detallada de cómo se han obtenido las restricciones asociadas a la viga. Las restricciones de desigualdad activas para el ejemplo numérico de la subsección 8.2.6 están señaladas con el signo “•”; si no, son inactivas. La lista de variables auxiliares utilizadas se da en la subsección 8.2.9.

Propiedades mecánicas y geométricas de los elementos

En esta apartado se dan los detalles relativos a características mecánicas y geométricas. Módulo de elasticidad del hormigón a tiempos 0 y ∞ :

$$E_0 = 10000 \sqrt[3]{\mu_{f_c}} \quad (8.33)$$

$$E_\infty = \frac{E_0}{1 + \phi} \quad (8.34)$$

Secciones transversales (medidas como área de acero equivalente):

$$A_{c,t} = \frac{b_c t_c E_t}{E_s} \quad (8.35)$$

$$A_{u,t} = b_u t_u \quad (8.36)$$

$$A_{\ell,t} = b_\ell t_\ell \quad (8.37)$$

$$A_w = h_w t_w \quad (8.38)$$

Coordenadas de los centros de gravedad de cada uno de los elementos que conforman la viga:

$$Y_c = t_c/2 \quad (8.39)$$

$$Y_u = t_c + t_u/2 \quad (8.40)$$

$$Y_\ell = t_c + t_u + h_w + t_\ell/2 \quad (8.41)$$

$$Y_w = t_c + t_u + h_w/2 \quad (8.42)$$

Momentos de inercia (medidos como área de acero equivalente):

$$I_t = \frac{b_c t_c^3 E_t}{12 E_s} \quad (8.43)$$

$$I_s = \frac{b_u t_u^3}{12} + \frac{b_\ell t_\ell^3}{12} + \frac{t_w h_w^3}{12} \quad (8.44)$$

Cuadro 8.10: Sensibilidades $\frac{\partial \beta_i}{\partial x}$, con respecto a los datos x , en el ejemplo ilustrativo de la viga.

x	$\frac{\partial \beta_\delta}{\partial x}$	$\frac{\partial \beta_{x0}}{\partial x}$	$\frac{\partial \beta_{c\infty}}{\partial x}$	$\frac{\partial \beta_{u0}}{\partial x}$	$\frac{\partial \beta_{u\infty}}{\partial x}$	$\frac{\partial \beta_{l0}}{\partial x}$	$\frac{\partial \beta_{l\infty}}{\partial x}$	$\frac{\partial \beta_w}{\partial x}$	$\frac{\partial \beta_m}{\partial x}$	$\frac{\partial \beta_v}{\partial x}$
l	-0.29	-0.08	-0.06	-0.23	-0.74	-0.73	-0.70	-0.24	-0.03	-0.39
r_1	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	-0.02	0.00
r_2	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.02	0.00
pl	0.39	0.06	0.04	0.32	0.72	0.59	0.55	0.56	0.02	0.93
n_b	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
e_p	-1.72	-0.19	-0.14	-1.39	-2.89	-2.21	-2.02	-2.23	-0.06	-3.76
e_u	-2.20	-0.19	-0.14	-0.62	-2.38	-2.01	-1.86	-1.99	-0.06	-3.33
ϕ	-1.46	0.00	0.10	0.00	-4.04	0.00	-0.45	0.00	0.00	0.00
μ_{w_d}	-0.01	-0.01	0.00	-0.01	-0.05	-0.05	-0.05	-0.04	0.00	-0.06
μ_{p_s}	-1.40	-0.12	-0.09	-0.39	-1.51	-1.28	-1.18	-1.26	-0.04	-2.11
μ_{w_p}	-0.01	0.00	0.00	-0.01	-0.01	-0.01	-0.01	-0.01	0.00	-0.02
μ_{f_c}	0.03	0.03	0.03	0.05	0.11	0.01	0.01	0.00	0.02	0.00
μ_{f_s}	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
μ_{f_y}	0.00	0.00	0.00	0.02	0.06	0.05	0.05	0.05	0.00	0.05
μ_{γ_c}	-0.04	-0.02	-0.01	-0.03	-0.10	-0.13	-0.13	-0.10	-0.01	-0.15
μ_{γ_s}	0.00	0.00	0.00	0.00	-0.01	-0.01	-0.01	0.00	0.00	-0.01
μ_{bc}	0.00	0.00	0.00	0.22	0.00	0.00	0.00	0.00	0.10	0.00
μ_{tc}	12.24	1.05	1.14	27.04	48.14	-3.02	-2.22	-8.10	0.32	-12.54
v_{w_d}	-0.08	-0.04	-0.03	-0.57	-2.69	-1.60	-1.32	-2.25	-0.01	-4.00
v_{p_s}	-4.46	-0.15	-0.09	-1.95	-9.23	-5.49	-4.52	-7.74	-0.02	-13.74
v_{w_p}	-3.95	-0.20	-0.12	-6.44	-14.02	-7.71	-6.34	-10.71	-0.03	-19.02
v_{f_c}	0.00	-49.11	-52.46	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	-55.47	0.00
v_{f_s}	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
v_{f_y}	0.00	0.00	0.00	-871.1	-319.3	-35.75	-24.48	-544	-0.01	-245.1
v_{γ_s}	0.00	0.00	0.00	-0.01	-0.04	-0.02	-0.02	-0.03	0.00	-0.06
v_{γ_c}	-0.24	-0.12	-0.07	-1.42	-6.57	-4.62	-3.80	-6.70	-0.02	-12.00
σ_{bc}	0.00	0.00	0.00	-0.01	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
σ_{tc}	-1.93	-0.04	-0.04	-107.6	-218.3	-0.27	-0.11	-7.55	0.00	-15.14

Centro de gravedad de la sección transversal incluyendo todos los materiales:

$$V_t = \frac{\sum_e A_{e,t} Y_e + A_w Y_w}{\sum_e A_{e,t} + A_w} \quad (8.45)$$

Rigideces:

$$EI_t = E_s \left(I_t + I_s + \sum_e A_{e,t} (Y_e - V_t)^2 + A_w (Y_w - V_t)^2 \right) \quad (8.46)$$

Flechas en centro luz (asumiendo la presencia de apeos durante la construcción):

$$\delta = \delta_\infty - \delta_0 \quad (8.47)$$

éstas se calculan mediante la fórmula:

$$\delta_\infty = 2 \int_0^{L/2} \frac{(w_1 + l_d + s_u)(L-x)x^2 + C_p x^2}{4000EI_\infty} dx \quad (8.48)$$

y

$$\delta_0 = 2 \int_0^{L/2} \frac{(w_1 + l_d)(L-x)x^2}{4000EI_0} dx \quad (8.49)$$

La figura 8.11 muestra los momentos últimos resistidos por la sección (M_{un}) para diferentes posiciones de la fibra neutra. Este momento se calcula usando las ecuaciones de equilibrio de fuerzas y de momentos donde se utilizan las siguientes variables intermedias C_{un} , T_{un} y X_{un} (véase la figura 8.12). El conjunto n se utiliza para definir los intervalos en los que puede situarse la fibra neutra: $n \equiv \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

Las tensiones, en las posiciones u y ℓ en el tiempo t , en el centro de la viga son:

$$\sigma_{u,t} = \frac{M_c(V_t - t_c)E_s}{EI_t} \quad (8.50)$$

$$\sigma_{\ell,t} = \frac{M_c(t_c + t_w + h_w + t_i - V_t)E_s}{EI_t} \quad (8.51)$$

$$\tau_c = \frac{V_c}{h_w t_w} \quad (8.52)$$

Acciones sobre la viga

En este caso se considerará el peso muerto de la viga, una sobrecarga uniformemente repartida sobre el tablero (p_s), una carga en faja repartida en todo el ancho del tablero (w_d) y una sobrecarga puntual (w_p).

El peso por unidad de longitud correspondiente a la viga es

$$w_1 = \gamma_c b_c t_c + \gamma_s [b_u t_u + b_\ell t_\ell + h_w t_w + (b_\ell - t_w) h_w t_r] \quad (8.53)$$

y la parte proporcional de la carga en faja es (véase la figura 8.13)

$$l_d = \frac{w_d b_c}{p_\ell} \quad (8.54)$$

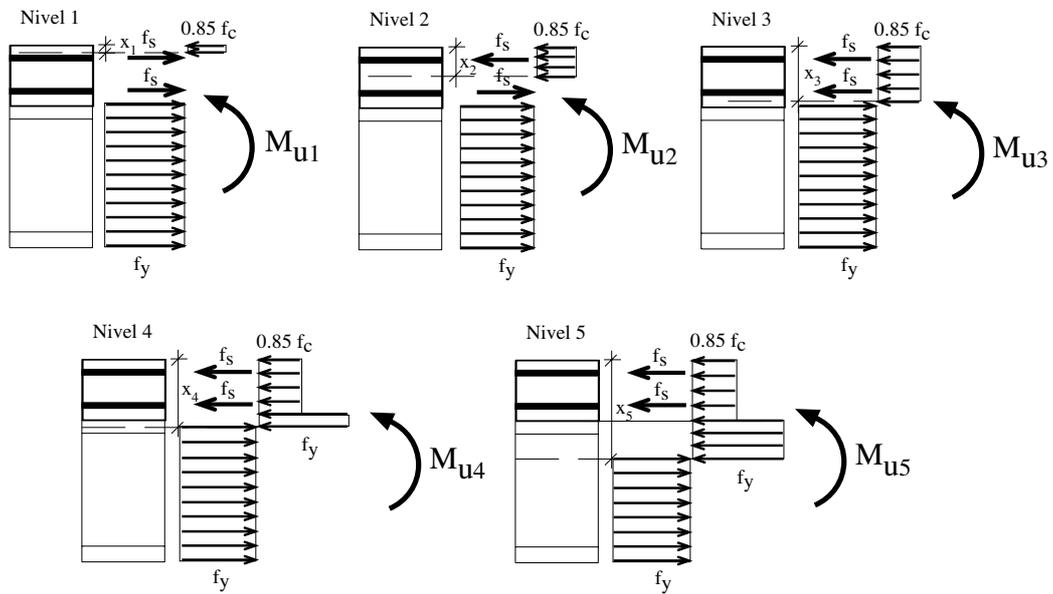


Figura 8.11: Posiciones posibles del eje neutro de plastificación de la sección.

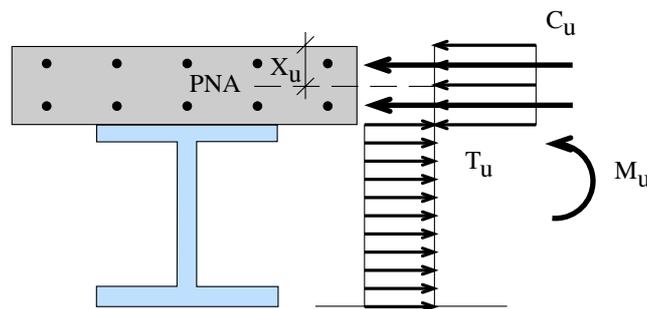


Figura 8.12: Plastificación por flexión.

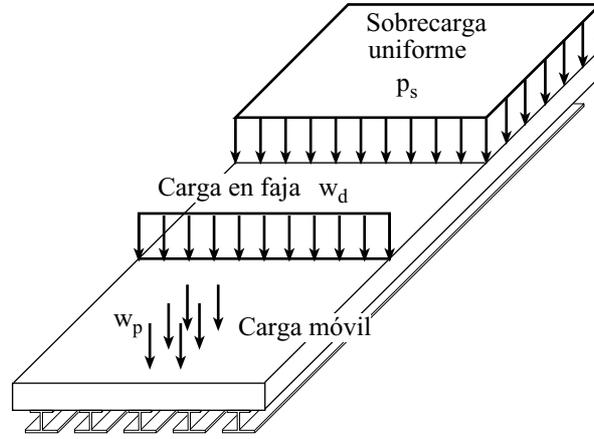


Figura 8.13: Cargas consideradas que actúan en el puente mixto.

la parte proporcional de la carga puntual considerando el factor de excentricidad (e_p) para tener en cuenta la existencia de n_b vigas es

$$C_p = \frac{w_p b_c e_p}{p_\ell} \quad (8.55)$$

y la parte proporcional de la sobrecarga uniformemente repartida considerando el factor de excentricidad (e_s) es

$$s_u = p_s b_c e_s \quad (8.56)$$

Por tanto, los momentos flectores y esfuerzos cortantes actuantes tanto en centro luz como en los apoyos son

$$M_c = \frac{(w_1 + l_d + s_u)L^2}{8000} + \frac{C_p L}{4000} \quad (8.57)$$

$$M_s = 0 \quad (8.58)$$

$$V_c = \frac{C_p}{2000} \quad (8.59)$$

$$V_s = \frac{(w_1 + l_d + s_u)L}{2000} + \frac{C_p}{1000} \quad (8.60)$$

Restricciones adicionales

Para simplificar se asume un puente esbelto, es decir,

$$\frac{pl}{n_b} \leq 0,1L \quad (8.61)$$

y que el hormigón trabaja a compresión

$$V_t \geq t_c; t \in \{0, \infty\}. \quad (8.62)$$

Adicionalmente, para facilitar el refuerzo del alma, se impone

$$\bullet \quad b_u \leq b_\ell \quad (8.63)$$

y

$$b_c = \frac{pl}{n_b} \quad (8.64)$$

Requerimientos del código

Las siguientes restricciones están fijadas por el código español.
La anchura de acero debe satisfacer

$$e_{max} = 0,150\text{m} \quad \text{if } f_{yk} = 235\text{MPa} \quad (8.65)$$

$$e_{max} = 0,084\text{m} \quad \text{if } f_{yk} = 275\text{MPa} \quad (8.66)$$

$$e_{max} = 0,038\text{m} \quad \text{if } f_{yk} = 355\text{MPa} \quad (8.67)$$

$$0,008 \leq t_u \leq e_{max} \quad (8.68)$$

$$0,008 \leq t_\ell \leq e_{max} \quad (8.69)$$

$$0,008 \leq t_w \leq e_{max} \quad (8.70)$$

$$\bullet \quad 0,008 \leq t_r \leq e_{max} \quad (8.71)$$

$$0,180 \leq t_c \quad (8.72)$$

$$b_\ell \leq 30t_\ell \quad (8.73)$$

La cantidad mínima de armadura es

$$\bullet \quad A_{s_1} \geq 0,0009b_c t_c \quad (8.74)$$

$$\bullet \quad A_{s_2} \geq 0,0009b_c t_c \quad (8.75)$$

Estado límite de deformaciones del alma: para evitar la abolladura del alma se tienen que cumplir las siguientes restricciones:

$$\frac{h_w}{t_w} \leq 0,55 \frac{E_s}{f_y} \sqrt{K} \quad (8.76)$$

$$\bullet \quad \frac{h_w}{t_w} \leq 100 \sqrt{\frac{355}{f_y}} \quad (8.77)$$

donde $K = \frac{h_w t_w}{b_u t_u}$.

Restricciones asociadas a los conectores

Un correcto diseño de los conectores requiere que se cumplan las siguientes restricciones geométricas:

$$\bullet \quad 4d_{st} \leq h_{st} \leq 0,75t_c \quad (8.78)$$

$$d_3 \geq 5d_{st} \quad (8.79)$$

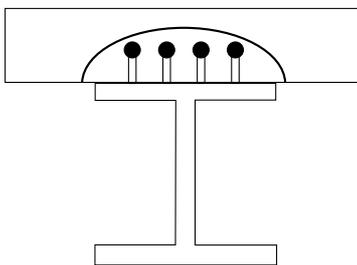


Figura 8.14: Ilustración del fallo de los conectores debido al hormigón circundante.

$$2,5d_{st} \leq d_1 \leq 0,8 \text{ m} \quad (8.80)$$

$$d_2 = 0,05 \text{ m} \quad (8.81)$$

$$d_3 \leq 0,8 \text{ m} \quad (8.82)$$

$$d_{st} \leq 2,5t_u \quad (8.83)$$

$$d_1(m-1) = b_u - 2d_2 \quad (8.84)$$

$$22t_u \geq d_3 \sqrt{\frac{f_y}{235}} \quad (8.85)$$

$$35t_u \geq d_1 \sqrt{\frac{f_y}{235}} \quad (8.86)$$

$$9t_u \geq d_2 \sqrt{\frac{f_y}{235}} \quad (8.87)$$

Para evitar el fallo debido al hormigón que rodea a los conectores se ha de cumplir (véase la figura 8.14).

$$\bullet \quad 0,6 \times 0,29 \frac{d_{st}^2}{1,25} \sqrt{f_c E_c} \geq N_{cs} d_3 / (mL/2) \quad (8.88)$$

y para evitar el fallo directo de los conectores

$$0,8 \times 450\pi \frac{d_{st}^2}{4 \times 1,25} \geq N_{cs} d_3 / (mL/2) \quad (8.89)$$

donde

$$N_{cs} = 0,85 f_c b_c t_c + (A_{s1} + A_{s2}) f_s \quad (8.90)$$

Restricciones asociadas al refuerzo del alma

Para el diseño del refuerzo del alma se han utilizado las siguientes restricciones:

$$I_r = \frac{1}{12} t_r b_u^3 + \frac{30t_w^4}{12} \sqrt{\frac{235}{f_y}} \quad (8.91)$$

$$\bullet \quad I_r \geq \left[1 + 2 \left(\frac{h_w/t_w - 75}{75} \right) \right] \left(21h_w - \frac{15}{h_w} \right) \frac{h_w t_w^3}{12(1 - \nu^2)}; \nu = 0,3 \quad (8.92)$$

$$I_r \geq 1,5 \left(\frac{h_w}{50} \right)^4 \quad (8.93)$$

$$60t_r \geq b_\ell - tw \quad (8.94)$$

Restricciones asociadas a las soldaduras de las chapas

Para una correcta soldadura entre chapas se ha de cumplir que:

$$\bullet \quad t_u \geq 0,008 + \frac{t_w - 0,01}{7,5} \quad (8.95)$$

$$t_\ell \leq 0,01 + \frac{t_w - 0,008}{7,5} \quad (8.96)$$

Máximos esfuerzos cortantes

Finalmente, las restricciones por esfuerzo cortante son:

$$\tau_{cr} = 5,34E_s 0,9(t_w/h_w)^2 \quad (8.97)$$

$$\lambda_w = \sqrt{\frac{f_y}{\sqrt{3}\tau_{cr}}} \quad (8.98)$$

$$m_t = \exp(-0,227086\lambda_w^2) \quad (8.99)$$

$$\tau_{max} = \frac{m_t f_y}{\sqrt{3}} \quad (8.100)$$

$$V_{max} = \tau_{max} h_w t_w \quad (8.101)$$

8.2.9. Notación

1. Datos

a) Constantes de diseño

L : longitud de vano (m).

pl : ancho de plataforma (m).

d_{st} : diámetro del conector (m).

r_1 : recubrimiento inferior de la armadura (m).

r_2 : recubrimiento superior de la armadura (m).

n_b : número de vigas de acero.

m : numero de conectores por fila (m).

b) Propiedades de los materiales

f_{ck} : resistencia característica del hormigón (MPa).

f_{sk} : resistencia característica del acero para armaduras (MPa).

f_{yk} : resistencia característica del acero estructural (MPa).

E_t : módulo de elasticidad del hormigón a tiempo $t \in \{0, \infty\}$ (MPa).

E_s : módulo de elasticidad del acero (MPa)..

ϕ : coeficiente de fluencia del hormigón.

ν : módulo de Poisson.

c) **Propiedades estadísticas**

μ_{w_d} : valor medio de w_d .

μ_{w_p} : valor medio de w_p .

μ_{p_s} : valor medio de p_s .

μ_{f_c} : valor medio de f_c .

μ_{f_s} : valor medio de f_s .

μ_{f_y} : valor medio de f_y .

μ_{γ_c} : valor medio de γ_c .

μ_{γ_s} : valor medio de γ_s .

v_{w_d} : coeficiente de variación de w_d .

v_{w_p} : coeficiente de variación de w_p .

v_{p_s} : coeficiente de variación de p_s .

v_{f_c} : coeficiente de variación de f_c .

v_{f_s} : coeficiente de variación de f_s .

v_{f_y} : coeficiente de variación de f_y .

v_{γ_c} : coeficiente de variación de γ_c .

v_{γ_s} : coeficiente de variación de γ_s .

d) **Datos relativos a las sobrecargas**

e_p : coeficiente de excentricidad de la carga puntual (adimensional).

e_s : coeficiente de excentricidad de la sobrecarga uniformemente repartida (adimensional).

e) **Límites inferiores de los coeficientes de seguridad.**

F_{c0}^0 : coeficiente de seguridad asociado al hormigón en el centro de la viga a tiempo 0.

$F_{c\infty}^0$: coeficiente de seguridad asociado al hormigón en el centro de la viga a tiempo ∞ .

F_{u0}^0 : coeficiente de seguridad asociado al ala superior de acero a tiempo 0.

$F_{u\infty}^0$: coeficiente de seguridad asociado al ala superior de acero a tiempo ∞ .

$F_{\ell 0}^0$: coeficiente de seguridad asociado al ala inferior de acero a tiempo 0.

$F_{\ell \infty}^0$: coeficiente de seguridad asociado al ala inferior de acero a tiempo ∞ .

F_w^0 : coeficiente de seguridad asociado al alma.

F_m^0 : coeficiente de seguridad asociado al momento último resistido por la sección.

F_v^0 : coeficiente de seguridad asociado al cortante último resistido por la sección.

f) **Datos relativos al coste**

c_c : coste por metro cúbico de hormigón (euros/m³).

c_s : coste por Newton de acero para armaduras (euros/N).

- c_y : coste por Newton de acero estructural (euros/N).
 c_{st} : coste por conector (euros).

2. Variables

a) Variables de diseño

- b_e : anchura del elemento $e \in \{c, u, \ell\}$ (m).
 t_e : espesores o altura del elemento $e \in \{c, u, \ell\}$ (m).
 h_w : altural del alma de acero (m).
 t_w : espesor del alma de acero (m).
 d_1, d_2, d_3 : separaciones entre conectores 1, 2, 3 (m).
 A_{s1} : armadura en la parte inferior de la losa de hormigón (m).
 A_{s2} : armadura en la parte superior de la losa de hormigón (m).
 h_{st} : altura del conector (m).
 t_r : espesor o altura del refuerzo del alma (m).

b) Variables aleatorias

- w_d : carga muerta (en faja) actuando sobre el ancho de plataforma (KN/m).
 w_p : sobrecarga (carga puntual) (KN).
 p_s : sobrecarga por unidad de superficie (KN/m²).
 f_c : resistencia del hormigón usada en los cálculos (MPa).
 f_s : resistencia del acero para armaduras usada en los cálculos (MPa).
 f_y : resistencia del acero estructural usada en los cálculos (MPa).
 γ_c : peso específico del hormigón usado en los cálculos (KN/m³).
 γ_s : peso específico del acero (kN/m³).

c) Variables auxiliares o intermedias

- V_p : esfuerzo cortante en la posición $p \in \{c, s\}$ (KN).
 $\sigma_{e,t}$: tensiones normales en la posición $e \in \{c, u, \ell\}$ a tiempo $t \in \{0, \infty\}$ (MPa).
 τ_p : tensión tangencial del alma en la posición $p \in \{c, s\}$ (MPa).
 M_p : momento en la posición $p \in \{c, s\}$ (MN.m).
 M_{un} : momento último resistido por la sección cuando se asume que la fibra neutra está en la posición $n \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ (MN).
 V_{max} : máximo esfuerzo cortante soportado por el acero estructural (MN/m²).
 w_1 : peso total de la viga por unidad de longitud (KN/m).
 l_d : carga muerta actuando sobre todo el ancho de la viga (KN/m).
 C_p : carga puntual actuando sobre la viga (KN).
 s_u : sobrecarga actuando sobre la viga por unidad de longitud (KN/m).
 V_t : situación del centro de gravedad de la viga a tiempo $t \in \{0, \infty\}$ (m).
 $A_{e,t}$: área de hormigón en la posición $e \in \{c, u, \ell\}$ a tiempo $t \in \{0, \infty\}$ (m²).
 A_w : área del alma (m²).
 I_t : momento de inercia de la losa de hormigón a tiempo $t \in \{0, \infty\}$ (m⁴).

- I_s : momento de inercia del alma (m^4).
 I_r : momento de inercia del refuerzo del alma (m^4).
 Y_e : coordenada del centro de gravedad de la losa de hormigón en la posición $e \in \{c, u, \ell\}$ (m).
 Y_w : localización del centro de gravedad del alma de acero (m).
 EI_t : rigidez del hormigón a tiempo $t \in \{0, \infty\}$ (MNm^2).
 δ_t : flecha de la viga en centro luz a tiempo $t \in \{0, \infty\}$ (m).
 δ : flecha de la viga en centro luz a tiempo ∞ tras sustraerla la flecha a tiempo 0 (m).
 δ_{max} : flecha máxima permitida en centro luz (m).
 A_{min} : cuantía mínima de armadura (m^2).
 e_{max} : espesor máximo de las chapas de acero (m).
 C_{un} : esfuerzo de compresión cuando se asume que la fibra neutra esta en la posición $n \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ (MN).
 T_{un} : esfuerzo de tracción cuando se asume que la fibra neutra esta en la posición $n \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ (MN).
 X_{un} : posición actual del eje neutro cuando se asume que la fibra neutra esta en la posición $n \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ (MN).
 τ_{cr} : máxima tensión tangencial soportada por el alma de la viga (MPa).
 λ_w : coeficiente auxiliar parta calcular la máxima tensión tangencial soportada por el alma.
 m_t : coeficiente auxiliar parta calcular la máxima tensión tangencial soportada por el alma.
 τ_{max} : máxima tensión tangencial soportada por el acero estructural (MPa).
 P_{st} : máxima fuerza soportada por los conectores (MN).
 N_{cs} : máxima fuerza soportada por la losa de hormigón (MN).

8.3. Dique en Talud de Escollera

En esta sección se describe con detalle el cálculo de un dique en talud basado en técnicas probabilistas. Existen en la literatura trabajos basados en técnicas de optimización y en coeficientes de seguridad, o en probabilidades de fallo (véase por ejemplo, USACE, PIANC, IWR, etc.). Incluso Vrouwenvelder [168] propuso una combinada aplicada a la calibración de códigos.

En el Manual de Ingeniería Costera de la USACE (U.S.A Corps of Engineers) y en el resultado final del proyecto MAST III (Marine Science and Technology Programme), ‘Probabilistic Design Tools for Vertical Breakwaters’ de la Unión Europea (1996-1999), se incluyen aspectos sobre el modelado físico de los procesos relevantes que afectan a este tipo de estructuras, considerando los aspectos estadísticos de las variables que intervienen. Se proponen dos métodos alternativos: el primero en el que se propone un procedimiento de optimización para el cálculo del nivel de seguridad óptimo, y el segundo basado en una aproximación clásica mediante coeficientes de seguridad. La metodología presentada en este ejemplo puede considerarse una continuación de las investigaciones llevadas a cabo por el USACE y el MAST III, en la que se combinan las dos metodologías prevaleciendo la más restrictiva.

El diseño paramétrico del dique se muestra en la figura 8.15, mientras que el listado de todas las variables y parámetros que intervienen se da en la subsección 8.3.8. Obsérvese que todos estos parámetros definen geoméricamente los diferentes elementos de la sección transversal del dique y deben definirse en los planos constructivos del proyecto. El objetivo del presente ejemplo es lograr un diseño óptimo desde el punto de vista económico, sujeto a un conjunto de restricciones que garantizan la seguridad de la estructura con respecto a los modos de fallo considerados, con una perspectiva clásica, es decir, mediante la utilización de coeficientes de seguridad y desde la óptica del diseño probabilista. Para lograr un diseño óptimo desde el punto de vista económico deberían considerarse los costes de construcción, mantenimiento, reparación, paradas operativas, desmantelamiento al final de su vida útil, etc.; sin embargo, para simplificar el problema y su exposición, se ha limitado el presente estudio al coste constructivo.

8.3.1. Clasificación de las variables y modos de fallo considerados

El conjunto de variables de diseño (X_1, \dots, X_n) se dividirá de forma detallada en los cinco subconjuntos siguientes (véase la Subsección 8.3.8 para la notación):

d: Variables de diseño a optimizar.

$$\mathbf{d} = (a, b, c, d, e, F_c, f, n, p, q, r, s, t, \alpha_\ell, \alpha_s)$$

η : Conjunto de parámetros dato utilizados en el diseño clásico.

$$\boldsymbol{\eta} = (C_{al}, C_c, C_{co}, C_{ul}, D_{WL}, g, \gamma_c, \gamma_s, \gamma_w)$$

ϕ : Variables aleatorias básicas usadas en los modelos probabilistas.

$$\boldsymbol{\phi} = (H_s, A_r, A_u, B_r, B_u, C_f, H, T, \mu_c, h_1, h_2)$$

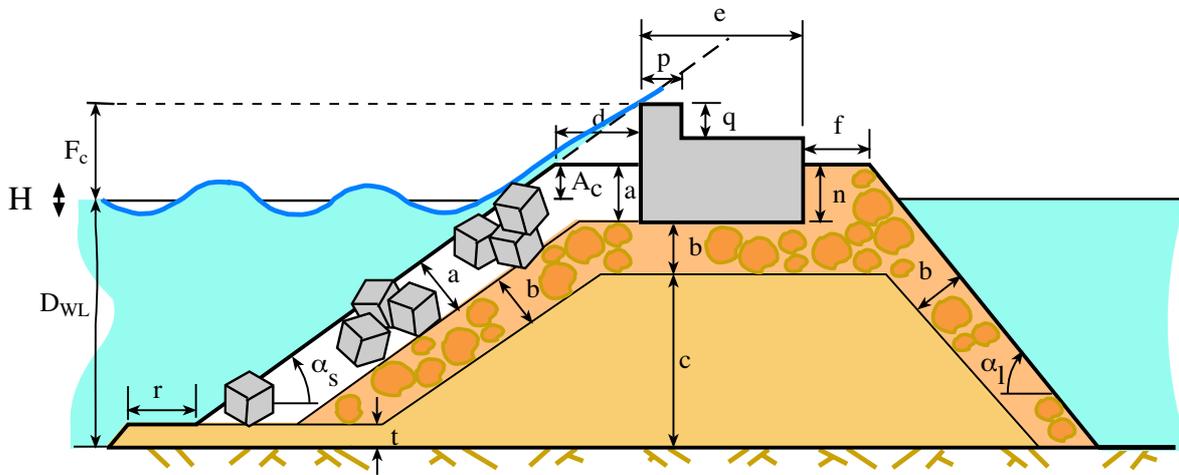


Figura 8.15: Parametrización del dique en talud usada en el ejemplo ilustrativo.

κ : Parámetros estadísticos que definen la variabilidad y dependencia de las variables aleatorias.

$$\kappa = (D, v_{A_r}, v_{B_r}, v_{C_f}, \mu_{A_r}, \mu_{B_r}, \mu_{A_u}, \mu_{B_u}, \mu_{C_f}, \mu_{\mu_c}, \mu_{h_1}, \mu_{h_2}, \sigma_{A_u}, \sigma_{B_u}, \sigma_{\mu_c}, \sigma_{h_1}, \sigma_{h_2})$$

ψ : Variables auxiliares o no básicas cuyos valores se obtienen a partir de las variables pertenecientes a los conjuntos $(\mathbf{d}, \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\phi})$ mediante alguna fórmula.

$$\psi = (A_c, F_h, F_v, I_r, I_{r_0}, L, \ell, \ell_e, P_{S_0}, R, R_u, S_0, V_c, V_1, V_2, V_3, W, W_1, W_f, \alpha, \lambda, \phi_e)$$

Para el presente estudio sólo se han considerado como variables aleatorias las básicas $\boldsymbol{\phi}$ y las correspondientes no básicas, es decir que todas las variables $\boldsymbol{\psi}$ que se obtienen mediante alguna fórmula, la cual contiene una variable aleatoria, será considerada aleatoria.

Aunque para el estudio de un dique en talud se pueden y deben considerar modos de fallo tales como, por ejemplo, estabilidad de las piezas de los mantos, estabilidad del núcleo, fallos geotécnicos, etc. Sólo se consideran en este ejemplo tres modos de fallo, que se incluirán en el procedimiento de optimización: (1) rebase, (2) estabilidad del manto principal y (3) deslizamiento del espaldón.

Algunos de los modos considerados están correlacionados, debido a que poseen agentes comunes, o porque la ocurrencia de alguno de ellos puede inducir a otros. Así por ejemplo el hecho de que se produzca una extracción de las piezas del manto principal, favorece la extracción de las piezas del manto secundario y posteriormente el núcleo, y puede dar lugar a una socavación progresiva que lleve a la ruina total del dique. En este ejemplo sólo se considerará la correlación debida a agentes comunes, ya que la interacción es complicada y aún no se comprende de forma adecuada, seguramente ésta será un área de investigación muy activa en un futuro próximo. Por tanto la fiabilidad calculada será una estimación incompleta, no porque la metodología empleada no pueda tenerla en consideración, sino

por la falta de información adecuada. Las necesidades proyectistas del futuro requerirán un gran trabajo experimental en este campo.

Estrictamente hablando, algunos de los modos de fallo considerados, tales como la extracción de piezas del manto, o el rebase, no se corresponden con la definición clásica de fallo estructural (colapso de la estructura), ya que por un lado, el manto es una estructura granular donde la conectividad y transmisión de esfuerzos se produce por la fricción y el grado de acoplamiento intergranular, y por otro, en el caso del rebase, no sólo importa si se produce o no, sino el volumen de agua que sobrepasa la coronación. Así pues, estos modos de fallo están relacionados con unos criterios preestablecidos o umbrales, que nos dan una indicación sobre la resistencia residual de la estructura antes del colapso. Por tanto como otras muchas disciplinas de la ingeniería civil, la ocurrencia de fallo no necesariamente significa que la estructura haya colapsado, sino que responde a otros criterios como que su resistencia se ha visto considerablemente mermada, o que se ha reducido considerablemente la funcionalidad para la que fue diseñada.

Para el caso de diques en talud, hay al menos tres criterios de fallo posible: inicio de avería, avería de Iribarren y destrucción, (véase Losada, 1990 para una discusión completa). Un desplazamiento de las piezas del orden de un 2-5% es un criterio típico para considerar inicio de avería. La elección de uno u otro criterio para el diseño, depende de varios factores, entre ellos, la capacidad o incapacidad de poder efectuar reparaciones cuando sea preciso, las consecuencias ambientales y económicas del fallo, etc.

Rebase. Para un dique en talud de pendiente $\tan \alpha_s$ y francobordo F_c , (véase la figura 8.15), y para una altura de ola H y un periodo T dados, el volumen de agua que sobrepasa la estructura puede estimarse del volumen de agua que sobrepasaría el nivel del francobordo, si el talud fuera indefinido. Con esta aproximación, el rebase se produce siempre que la diferencia entre la máxima cota alcanzada por el agua en el talud imaginario, llamada run-up (R_u), exceda el nivel del francobordo F_c .

Losada (1990) propuso la siguiente ecuación de verificación basada en la experimentación para evaluar el término adimensional R_u/H :

$$\frac{R_u}{H} = A_u (1 - e^{B_u I_r}) \quad (8.102)$$

donde A_u y B_u son coeficientes que dependen del tipo de piezas del manto e I_r es el número de Iribarren

$$I_r = \frac{\tan \alpha_s}{\sqrt{H/L}} \quad (8.103)$$

donde L es la longitud de onda de la ola y α_s es el ángulo del talud de barlovento.

Bajo tales condiciones, la ocurrencia de fallo se puede comprobar con la siguiente ecuación de verificación:

$$\frac{F_c}{R_u} \geq F_o \quad (8.104)$$

donde F_o es el coeficiente de seguridad al rebase.

Obsérvese, que para clarificar y simplificar el problema, la ecuación de verificación (8.104) sólo indica si se produce o no rebase, para un estudio adecuado debería calcularse el volumen de agua que sobrepasa la estructura, ya que el nivel de daño en el intradós del espaldón depende de esa cuantía.

Estabilidad del manto principal. Este fallo hace referencia a la extracción de las piezas (cubos, escollera, dolos, ...) del manto principal. Basándose en resultados experimentales, Losada (1990) propuso la siguiente ecuación de verificación para evaluar el término adimensional $\frac{W}{\gamma_w H^3}$:

$$\frac{W}{\gamma_w H^3} = R\Phi_e \quad (8.105)$$

donde γ_w es el peso específico del agua, Φ_e es la función de estabilidad, R es una constante adimensional, que depende de γ_c y γ_w , y W es el peso individual de los bloques, que están dados por

$$W = \gamma_c \ell^3 \quad (8.106)$$

$$R = \frac{\gamma_c/\gamma_w}{\left(\frac{\gamma_c}{\gamma_w} - 1\right)^3} \quad (8.107)$$

$$\Phi_e = A_r(I_r - I_{r_0}) \exp[B_r(I_r - I_{r_0})] \quad (8.108)$$

$$I_r \geq I_{r_0} \quad (8.109)$$

donde γ_c es el peso específico del hormigón (cubos), ℓ es la longitud característica del lado del cubo (se supone que el manto principal está constituido por dos capas de bloques cúbicos), y la expresión (8.109) define el rango de validez del modelo,

$$I_{r_0} = 2,656 \tan \alpha_s, \quad (8.110)$$

y A_r y B_r dependen de $\cot \alpha_s$ por medio de las expresiones experimentales

$$A_r = 0,2566 - 0,177047 \cot \alpha_s + 0,0342933 \cot^2 \alpha_s \quad (8.111)$$

$$B_r = -0,0201 - 0,4123 \cot \alpha_s + 0,055 \cot^2 \alpha_s \quad (8.112)$$

que son válidas siempre y cuando se cumpla que $1,5 \leq \cot \alpha_s \leq 3$.

Bajo tales condiciones, la ocurrencia de fallo por extracción de piezas del manto puede determinarse mediante la ecuación de verificación:

$$\frac{W}{\gamma_w R \Phi_e H^3} \geq F_a \quad (8.113)$$

donde F_a es el coeficiente de seguridad a fallo del manto principal.

Deslizamiento del espaldón. Este fallo ocurre cuando el espaldón desliza sobre su base por efecto de la presión del agua. Se produce cuando se cumple la siguiente ecuación de verificación (véase la figura 8.16(b))

$$\mu_c(W_1 - F_v) = F_h \quad (8.114)$$

donde μ_c es el coeficiente de rozamiento al deslizamiento, y (véase Martin et al. (1999)):

$$F_h = (S_0 - A_c)P_{S_0} + (W_f + A_c)\lambda P_{S_0} \quad (8.115)$$

$$F_v = \frac{1}{2}\lambda P_{S_0}e \quad (8.116)$$

$$W_1 = V_c\gamma_c - W_f e\gamma_w \quad (8.117)$$

$$V_c = pq + se \quad (8.118)$$

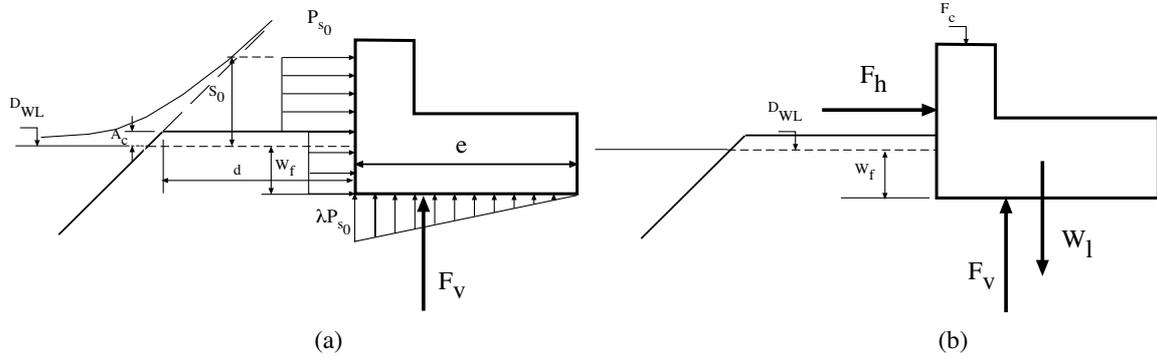


Figura 8.16: Fuerzas que actúan sobre el espaldón y que pueden producir el deslizamiento con respecto a su base.

donde F_h y F_v son la fuerza total horizontal y vertical debido a la presión del agua, S_0 es el nivel de agua que alcanzaría la ola debido al run-up si el talud fuera indefinido, A_c es la cota a la que está situada la berma, P_{S_0} es la presión que ejerce la ola sobre el espaldón, W_f es la profundidad de agua a la que está sumergido el espaldón, e es el ancho del espaldón, $V_c \gamma_c$ es el peso total de hormigón del espaldón, y W_1 es su peso actual (parte seca y parte sumergida).

Para el caso en el que $I_r \geq 2$, las presiones que actúan en el espaldón al nivel z son (véase la figura 8.16):

$$P_d(z) = \begin{cases} \lambda P_{S_0} & \text{if } z < A_c \\ P_{S_0} & \text{if } z > A_c \end{cases} \quad (8.119)$$

donde

$$I_r \geq 2 \quad (8.120)$$

$$P_{S_0} = \alpha \gamma_w S_0 \quad (8.121)$$

$$S_0 = H \left(1 - \frac{A_c}{R_u} \right) \quad (8.122)$$

$$\alpha = 2C_f \left(\frac{R_u}{H} \cos \alpha_s \right)^2 \quad (8.123)$$

$$\lambda = 0,8 \exp \left(-10,9 \frac{d}{L} \right) \quad (8.124)$$

$$\left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 = g \frac{2\pi}{L} \tanh \left(\frac{2\pi D_{WL}}{L} \right) \quad (8.125)$$

donde g es la aceleración de la gravedad, d es la anchura de la berma, α es un coeficiente adimensional, D_{WL} es el nivel del mar de diseño, y C_f es un coeficiente experimental.

Obsérvese que sólo se verifica el primer pico de presión; pero la presión reflejada puede actuar a posteriori (véase Martín et al. (1999) para más detalles). El fallo por deslizamiento puede verificarse mediante la siguiente expresión

$$\frac{\mu_c(W_1 - F_v)}{F_h} \geq F_s \quad (8.126)$$

donde F_s es el coeficiente de seguridad frente al deslizamiento.

8.3.2. Criterios de diseño

En ingeniería oceanográfica hay ciertas normas de buena práctica que deben tenerse en consideración. Algunas son propias de cada país y otras tienen raíces históricas. Las usadas en este ejemplo son¹ (véase la figura 8.15):

1. Espesores de capa y ancho de la berma:

$$a = 2\ell \quad (8.127)$$

$$b = 2\ell_e \quad (8.128)$$

$$\bullet d \geq 2\ell \quad (8.129)$$

$$\bullet f \geq 2\ell_e \quad (8.130)$$

2. Condiciones de filtro:

$$\bullet \frac{W}{20} \leq \ell_e^3 \gamma_s \quad (8.131)$$

$$\ell_e^3 \gamma_s \leq \frac{W}{10} \quad (8.132)$$

3. Condicionamientos constructivos:

$$b + c \leq D_{WL} \quad (8.133)$$

$$D_{WL} \leq a + b + c \quad (8.134)$$

$$t = 1m \quad (8.135)$$

$$r = 2t \quad (8.136)$$

$$p = 2 \quad (8.137)$$

4. Razones económicas:

$$1,5 \leq \cot \alpha_s \leq 3 \quad (8.138)$$

$$\bullet 1,5 \leq \cot \alpha_\ell \leq 3 \quad (8.139)$$

5. Rotura del oleaje y control del rebase:

$$\bullet A_c \geq 3H_s/4 \quad (8.140)$$

$$F_c \geq S_0 \quad (8.141)$$

¹ Círculos negros frente a las inecuaciones indican que en la solución numérica del ejemplo éstas son activas, es decir, degeneran en igualdades

6. Identidades geométricas:

$$D_{WL} + F_c = b + c + s + q \quad (8.142)$$

$$W_f = s + q - F_c \quad (8.143)$$

$$A_c = a + b + c - D_{WL} \quad (8.144)$$

7. Requerimientos del modelo:

$$s \leq 12(\bullet); \quad 2 \leq q \leq 8(\bullet); \quad e \geq 10 \quad (8.145)$$

donde ℓ y ℓ_e son la longitud de cubo equivalente para los mantos principal y secundario, respectivamente, y H_s es la altura de ola significativa, parámetro descriptor del estado de mar de cálculo.

8.3.3. Función a optimizar

Para el ejemplo que nos ocupa, la función a optimizar es el coste de construcción:

$$C = C_c V_c + C_{al} V_1 + C_{ul} V_2 + C_{co} V_3 \quad (8.146)$$

donde V_c, V_1, V_2 y V_3 son los volúmenes de hormigón, manto principal, manto secundario y núcleo, respectivamente, y C_c, C_{al}, C_{ul} y C_{co} son los respectivos costes por unidad de volumen.

Considerando el dique en talud de la figura 8.15, los volúmenes se calculan con las siguientes expresiones:

Hormigón del espaldón:

$$V_c = pq + se \quad (8.147)$$

Manto principal:

$$V_1 = ad + a \frac{b + c - t}{\sin \alpha_s} + \frac{a^2}{2 \tan \alpha_s} \quad (8.148)$$

Manto secundario:

$$V_2 = b \left(e + d - a \tan \frac{\alpha_s}{2} \right) + b \frac{c - t}{\sin \alpha_s} + \frac{b^2}{2 \tan \alpha_s} + \left(2f + \frac{n + b}{\tan \alpha_\ell} \right) \frac{n + b}{2} + \frac{cb}{\sin \alpha_\ell} \quad (8.149)$$

Núcleo:

$$V_3 = c \left(f + e + d - (a + b) \tan \frac{\alpha_s}{2} - \frac{b}{\sin \alpha_\ell} + \frac{n + b}{\tan \alpha_\ell} \right) + \frac{c^2}{2} \left(\frac{1}{\tan \alpha_s} + \frac{1}{\tan \alpha_\ell} \right) + t \left(r + \frac{a + b}{\sin \alpha_s} \right) \quad (8.150)$$

8.3.4. Hipótesis estadísticas

Asumiendo una vida útil del dique en talud de 50 años, y con el fin de poder aplicar el método propuesto, es necesario definir el conjunto de variables deterministas y aleatorias, y sus dependencias.

Parámetros:

1. Geométricos:

- a) El francobordo, F_c , y las pendientes de los taludes α_s y α_ℓ vienen dados por sus correspondientes valores nominales, y se consideran deterministas.

2. Propiedades de los materiales:

- a) Los pesos específicos γ_c, γ_w y γ_s de hormigón, agua y escollera vienen dados por sus valores nominales correspondientes, y se consideran deterministas.

3. Propiedades mecánicas:

- a) El coeficiente de rozamiento μ_c se considera una variable normal con media $\mu_{\mu_c} = 0,6$ y valor característico $\mu_{c0,05} = 0,55$.

4. Experimentales:

- a) Modelo de run-up

$$\frac{R_u}{H} = A_u (1 - e^{B_u I_r}) \quad (8.151)$$

- A_u es una variables normal $N(\mu_{A_u}, \sigma_{A_u}^2)$, donde $\mu_{A_u} = 1,05$ y $\sigma_{A_u} = 0,21$.
- B_u es una variables normal $N(\mu_{B_u}, \sigma_{B_u}^2)$, donde $\mu_{B_u} = -0,67$ y $\sigma_{B_u} = 0,134$. Estas variables se han obtenido por un procedimiento de ajuste, y dado que su correlación es prácticamente nula se considerarán independientes.

- b) Modelo de estabilidad del manto

$$\Phi_e = A_r (I_r - I_{r0}) \exp[B_r (I_r - I_{r0})] \quad (8.152)$$

- A_r es una variable normal $N(\mu_{A_r}, \sigma_{A_r}^2)$, donde

$$\mu_{A_r} = 0,2566 - 0,177047 \cot \alpha_s + 0,0342933 \cot^2 \alpha_s \quad (8.153)$$

- B_r es una variable normal $N(\mu_{B_r}, \sigma_{B_r}^2)$, donde

$$\mu_{B_r} = -0,0201 - 0,4123 \cot \alpha_s + 0,055 \cot^2 \alpha_s \quad (8.154)$$

5. Modelo de deslizamiento

- a) C_f es una variable normal con media μ_{C_f} y desviación típica σ_{C_f} .

- b) α es una variable normal cuya distribución puede obtenerse a partir de la ecuación (8.123).
- c) λ es determinista y viene dada por su valor nominal.
- d) S_0 es una variable aleatoria cuya distribución puede obtenerse de la ecuación (8.122).
- e) P_d y P_{S_0} son variables aleatorias cuyas distribuciones pueden obtenerse a partir de las ecuaciones (8.119) y (8.121), respectivamente.

Agentes:

1. Climáticos:

- a) La marea astronómica h_1 se considera una variable uniforme $U(zp, zp+tr)$, donde zp es el cero del puerto y tr es la carrera de marea.
- b) La marea meteorológica h_2 se considera una variable normal $N(\mu_{h_2}, \sigma_{h_2}^2)$. Así, el nivel del mar será $D_{WL} = h_1 + h_2$.
- c) La altura máxima de ola H_D y el periodo de pico T_p en un estado de mar son variables aleatorias con funciones de distribución:

$$F_{H_D}(x; H_s) = 1 - \exp \left[- \left(\frac{x - 1,263 - 0,326H_s - 0,172H_s^2}{1,465} \right)^{2,507} \right];$$

$$x \geq 1,263 + 0,326H_s + 0,172H_s^2 \quad (8.155)$$

y

$$F_{T_p}(x; H_s) = \exp \left[- \left(\frac{11,176 + 3,756H_s - 0,415H_s^2 - x}{7,597} \right)^{2,992} \right];$$

$$x \leq 11,176 + 3,756H_s - 0,415H_s^2 \quad (8.156)$$

donde H_s es una variable aleatoria con función de densidad exponencial:

$$f_{H_s}(x) = 1,58247 \exp(-1,58247(x - 3)); \quad x \geq 3;$$

donde sólo se consideran estados de mar superiores a tres metros ($H_s > 3$).

Estas distribuciones de H_D y T_p como función de H_s , y la distribución de H_s se han derivado de los datos de la boya de Gijón. Los datos recogen la información de 5,69 años, 260 tormentas ($H_s > 3$), y 1857 estados de mar (de una hora de duración).

Dependencia entre las variables:

Como se explicó en la subsección 8.3.1, todas las variables aleatorias mencionadas se asumen independientes, y las demás se considerarán deterministas. Es importante recalcar que el motivo de esta hipótesis no se debe a la imposibilidad del método para tratar correlación entre variables, sino a la falta de entendimiento y de datos sobre la interacción

entre ellas. Además, los modos de fallo podrán estar correlacionados, debido a la presencia de variables comunes. En otras palabras, la principal fuente de correlación entre modos de fallo se debe a su dependencia en variables comunes y no a la dependencia de las variables en sí mismas.

La elección de las funciones estadísticas y de sus parámetros se ha elegido con propósitos ilustrativos. Para aplicar el método a casos reales se ha de realizar una selección mucho más cuidadosa, usando registros de datos de periodos largos. Sólo unos pocos países tienen información suficiente para obtener estas funciones de forma adecuada.

8.3.5. Formulación y solución del problema dual

Siguiendo el procedimiento descrito en el capítulo 4, el primer paso es seleccionar los límites inferiores de los coeficientes de seguridad F_o^0 , F_s^0 y F_a^0 , y los límites inferiores de los índices de fiabilidad β_o^0 , β_s^0 y β_a^0 ; el siguiente es comenzar con el procedimiento iterativo hasta que se cumplan todas las restricciones.

Diseño clásico óptimo. Para obtener el diseño clásico en la iteración k , se minimiza la función de coste

$$c(\bar{\mathbf{d}}, \tilde{\boldsymbol{\eta}}, \tilde{\boldsymbol{\phi}}, \boldsymbol{\psi}) \quad (8.157)$$

sujeta a las restricciones asociadas a los coeficientes de seguridad:

Rebase:

$$\frac{F_c}{R_u} \geq F_o^k \quad (8.158)$$

Estabilidad del manto principal:

$$\frac{W}{\gamma_w R \Phi_e H^3} \geq F_a^k \quad (8.159)$$

Deslizamiento del espaldón:

$$\frac{\mu_c(W_1 - F_v)}{F_h} \geq F_s^k \quad (8.160)$$

y a las restricciones de diseño.

Diseño óptimo probabilista. Para evaluar los límites inferiores de los índices de fiabilidad β , que es equivalente a calcular los límites superiores de las probabilidades de fallo de cada uno de los modos de fallo considerados, se aplica el procedimiento descrito en la sección 2.7. Nótese que se va a calcular la probabilidad de fallo durante la vida útil de la obra. Consecuentemente, la probabilidad de fallo para el modo i es:

$$P_{f_i} = 1 - \left(1 - \int_3^{\infty} f_{H_s}(H_s) P_{f_{ss_i}}(H_s) dH_s \right)^{n_{ss} D} \quad (8.161)$$

donde $P_{f_{ss_i}}(H_s)$ es la probabilidad de fallo para el modo i en un estado de mar definido por H_s , y n_{ss} es el número equivalente de estados de mar al año ($n_{ss} = 326$ para los datos de Gijón) y D es la vida útil. La integral (8.161) puede calcularse usando la fórmula de cuadratura de Gauss-Legendre como:

$$P_{f_i} \approx 1 - \left(1 - \frac{H_s^{max} - H_s^{min}}{2} \sum_{j=1}^n w_j f_{H_s}(H_{s_j}) P_{f_{ss_i}}(H_{s_j}) \right)^{n_{ss}D} \quad (8.162)$$

donde w_j y H_{s_j} son respectivamente los puntos y los pesos de Gauss.

Como se necesita $P_{f_{ss_i}}(H_{s_j})$ se aplica el siguiente procedimiento para cada H_{s_j} :

1. Transformación de Rosenblatt: dado que en el presente ejemplo todas las variables aleatorias se han considerado independientes la transformación se simplifica mucho

$$\begin{aligned} u_1 &= \Phi((A_u - \mu_{A_u})/\sigma_{A_u}) = \Phi(z_1) \\ u_2 &= \Phi((B_u - \mu_{B_u})/\sigma_{B_u}) = \Phi(z_2) \\ u_3 &= \Phi((A_r - \mu_{A_r})/\sigma_{A_r}) = \Phi(z_3) \\ u_4 &= \Phi((B_r - \mu_{B_r})/\sigma_{B_r}) = \Phi(z_4) \\ u_5 &= F_{T_p}(T; H_{s_j}) = \Phi(z_5) \\ u_6 &= F_{H_D}(H; H_{s_j}) = \Phi(z_6) \\ u_7 &= \Phi((\mu_c - \mu_{\mu_c})/\sigma_{\mu_c}) = \Phi(z_7) \\ u_8 &= \Phi((C_f - \mu_{C_f})/\sigma_{C_f}) = \Phi(z_8) \\ u_9 &= (h_1 - zp)/tr = \Phi(z_9) \\ u_{10} &= \Phi((h_2 - \mu_{h_2})/\sigma_{h_2}) = \Phi(z_{10}) \end{aligned} \quad (8.163)$$

2. Transformación a variables normales tipificadas (normalizadas $N(0, 1)$):

$$\begin{aligned} z_1 &= (A_u - \mu_{A_u})/\sigma_{A_u} \\ z_2 &= (B_u - \mu_{B_u})/\sigma_{B_u} \\ z_3 &= (A_r - \mu_{A_r})/\sigma_{A_r} \\ z_4 &= (B_r - \mu_{B_r})/\sigma_{B_r} \\ z_5 &= \Phi^{-1}(F_{T_p}(T; H_{s_j})) \\ z_6 &= \Phi^{-1}(F_{H_D}(H; H_{s_j})) \\ z_7 &= (\mu_c - \mu_{\mu_c})/\sigma_{\mu_c} \\ z_8 &= (C_f - \mu_{C_f})/\sigma_{C_f} \\ z_9 &= \Phi^{-1}((h_1 - zp)/tr) \\ z_{10} &= (h_2 - \mu_{h_2})/\sigma_{h_2} \end{aligned} \quad (8.164)$$

3. Resolución de los siguientes problemas de optimización para cada H_{s_j} :

$$\begin{aligned} &\text{Minimizar} && \beta_{i,j}^2 = \sum_{k=1}^{10} z_k^2 \\ &A_u, B_u, H, T, A_r, B_r, C_f, \mu_c, h_1, h_2 \end{aligned} \quad (8.165)$$

sujeto a (8.163) y a alguna de las siguientes restricciones.

Rebase:

$$1 = \frac{F_c}{R_u} \quad (8.166)$$

Estabilidad del manto principal:

$$1 = \frac{W}{\gamma_w R \Phi_e H^3} \quad (8.167)$$

Deslizamiento del espaldón:

$$1 = \frac{\mu_c (W_1 - F_v)}{F_h} \quad (8.168)$$

4. La probabilidad de fallo para el modo i en un estado de mar definido por H_{s_j} se calcula como:

$$P_{f_{ssi}}(H_{s_j}) = \Phi(-\beta_{i,j}) \quad (8.169)$$

Una vez que las probabilidades de fallo para las distintas alturas de ola significativa están calculadas, la probabilidad de fallo durante la vida útil de la obra se calcula usando (8.162). Y su índice de fiabilidad β asociado es:

$$\beta_i^k = -\Phi^{-1}(P_{f_i}) \quad (8.170)$$

Comprobación de la convergencia y actualización de los coeficientes de seguridad. En esta etapa se comprueba si los índices de fiabilidad obtenidos (β^k) satisfacen los límites deseados. Si la respuesta es afirmativa, el procedimiento se detiene, y el diseño final es el obtenido por el diseño clásico. Si es negativa, se actualizan los coeficientes de seguridad mediante las ecuaciones (7.70) o (7.71) y se vuelve a la etapa 1.

8.3.6. Ejemplo numérico y análisis de los resultados

El método propuesto ha sido implementado en GAMS (General Algebraic Modeling System) (véase Castillo, Conejo, Pedregal, García and Alguacil (2001)), con un dique en talud con las siguientes características:

1. Los límites inferiores de los coeficientes de seguridad y de los índices de fiabilidad han de depender de las consecuencias asociadas al fallo de cada uno de los modos considerados durante la vida útil de la obra (se ha considerado un periodo de 50 años) (véase Vrouwenvelder (2002)). Así, los límites inferiores de los coeficientes de seguridad iniciales ($k = 0$) son:

$$F_o^0 = 1,05; \quad F_s^0 = 1,5; \quad F_a^0 = 1,05, \quad (8.171)$$

y los límites inferiores de los índices de fiabilidad (β) son:

$$\beta_o^0 = 2,32; \quad \beta_s^0 = 3,08; \quad \beta_a^0 = 3,08, \quad (8.172)$$

que se corresponden con probabilidades de fallo de 0,01 y 0,001, respectivamente.

Cuadro 8.11: Valores nominales, estadísticos y costes del ejemplo numérico.

VALORES DE DISEÑO
<i>Valores nominales</i>
$p = 2m; q = 4m; e = 8m; r = 2m; t = 1m;$ $zp = 20m; tr = 5m; H_s = 5m; D_{WL} = 25m;$
$\gamma_c = 23,5KN/m^3; \gamma_s = 26KN/m^3; \gamma_w = 10,25KN/m^3$
<i>Propiedades estadísticas</i>
$\mu_{A_u} = 1,05; \sigma_{A_u} = 0,21; \mu_{B_u} = -0,67; \sigma_{B_u} = 0,134; \mu_{\mu_c} = 0,6; \sigma_{\mu_c} = 0,01941;$ $\mu_{C_f} =; \sigma_{C_f} = 1,45; \mu_{h_2} = 0,02414; \sigma_{h_2} = 0,11597;$ $\mu_{A_r} = 0,2566 - 0,177047 \cot \alpha_s + 0,0342933 \cot^2 \alpha_s; \sigma_{A_r} = 0,21;$ $\mu_{B_r} = -0,0201 - 0,4123 \cot \alpha_s + 0,055 \cot^2 \alpha_s; \sigma_{B_r} = 0,134$
<i>Coste</i>
$C_{al} = 818,4euros/m^3; C_{ul} = 18,72euros/m^3; C_{co} = 2,4euros/m^3; C_c = 60,1euros/m^3$

- Para el diseño clásico, se toma un estado de mar de diseño de $H_s = 6,5$. La altura de ola máxima y el periodo de pico de la ola se toman como los cuantiles 0,99 de ambas distribuciones, las demás variables aleatorias se igualan a sus valores medios, aunque podrían igualarse a sus valores característicos. El estado de mar de cálculo se toma como $D_{WL} = zp + tr$.
- Los valores nominales de las variables, los parámetros estadísticos y los costes del ejemplo numérico se dan en la tabla 8.11.

Análisis de resultados La tabla 8.12 muestra la convergencia del método, que para este caso se alcanza tras 14 iteraciones. La primera columna muestra los valores de las variables geométricas, los coeficientes de seguridad y los correspondientes índices de fiabilidad, es decir, aquellos que resultan de utilizar los coeficientes de seguridad en (8.171) sin consideración alguna sobre las probabilidades de fallo (índices de fiabilidad en (8.172)). Sin embargo, como los índices de fiabilidad obtenidos con este diseño son menores que los límites inferiores

Cuadro 8.12: Ilustración del proceso iterativo. Los valores de diseño finales están en negrita, mientras que los coeficientes de seguridad o índices de fiabilidad activos se encuentran subrayados.

Variable	Unidades	ITERACIONES			
		1	2	3	14 (fin)
Coste	$euros \times 10^3$	272.2	281.9	291.1	299.7
a	m	6.11	6.18	6.16	6.16
b	m	2.18	2.20	2.19	2.19
c	m	16.59	16.50	17.27	17.47
r	m	2.00	2.00	2.00	2.00
t	m	1.00	1.00	1.00	1.00
e	m	10.00	14.51	16.13	23.54
p	m	2.00	2.00	2.00	2.00
s	m	6.61	12.00	12.00	12.00
q	m	7.13	8.00	8.00	8.00
d	m	6.11	6.18	6.16	6.16
f	m	2.18	2.20	2.19	2.19
n	m	0.00	0.00	0.00	0.00
β	m	0.46	0.46	0.46	0.46
α	m	0.59	0.59	0.59	0.59
F_c	m	12.50	18.70	19.46	19.67
F_o	—	1.21	1.81	1.88	1.90
F_s	—	<u>1.50</u>	3.92	7.41	12.58
F_a	—	<u>1.50</u>	1.55	1.53	1.54
β_o	—	2.70	2.88	3.23	3.32
β_s	—	1.87	1.33	2.27	3.08
β_a	—	2.92	3.13	3.07	3.08

elegidos (8.172), los coeficientes de seguridad deben incrementarse usando (7.70) o (7.71), y repetirse el diseño clásico con los nuevos coeficientes de seguridad, en la iteración 2. Como ocurre lo mismo con los índices de fiabilidad de la segunda iteración, el procedimiento continúa hasta que se llega a la iteración 14, en la que se satisfacen las restricciones (8.172).

La última columna de la tabla muestra los valores de las variables de diseño, junto con los factores de seguridad y sus índices de fiabilidad asociados. Los valores activos aparecen subrayados en la tabla.

A la vista de la tabla se puede concluir lo siguiente. Los límites inferiores de los coeficientes de seguridad F_o^0 , F_s^0 y F_a^0 son inactivos, lo mismo que β_o^0 . Mientras que los límites β_s^0 y β_a^0 son activos, lo que implica que los límites probabilistas asociados a sus modos de fallo son más restrictivos que los asociados a los coeficientes de seguridad, y que la seguridad frente a rebase queda garantizada con la seguridad frente a estos modos de fallo.

Nótese que el valor óptimo del recubrimiento del espaldón a sotavento (n) es 0. Esto

Cuadro 8.13: Sensibilidades del coste $\frac{\partial C}{\partial x}$ con respecto a los datos (η) del ejemplo del dique en talud.

$\partial C/\partial x$						
x	D_{WL}	γ_c	γ_s	γ_w	F_o	F_s
	14174.2	-22562.5	-47.3	51848.6	0.000	1599.5
x	F_a	c_{al}	c_{ul}	c_{co}	c_c	H_s
	62258.2	335.9	226.0	1070.2	298.5	40391.0

conlleva a un ahorro en la construcción. Pero desde un punto de vista práctico, no es una solución razonable, y no se daría si se consideraran otros modos de fallo como el provocado por motivos geotécnicos. Pero nos ilustra que el método nos avisa de la presencia de variables sin restringir.

Las sensibilidades para el ejemplo ilustrativo se muestran en las Tablas 8.13 y 8.14. La tabla 8.13 da las sensibilidades del coste asociadas al diseño clásico. Permite saber cuánto cambia el coste de construcción del dique en talud cuando se produce un pequeño cambio en alguno de los parámetros. Esta información es extremadamente útil durante el proceso constructivo para controlar el coste, y para analizar la influencia de los factores de seguridad requeridos por los códigos en el mismo. Por ejemplo, un cambio de una unidad en D_{WL} conlleva un aumento aproximado en el coste total de 14174,2 euros (véase la correspondiente entrada en la tabla 8.13). Similarmente, un aumento de una unidad en el peso específico del hormigón γ_c supondría una disminución aproximada de 22562,5 euros.

La tabla 8.14 muestra las sensibilidades de los índices de fiabilidad. Es muy útil conocer la influencia de los parámetros, como desviaciones típicas, medias, coeficientes de variación, etc, en la probabilidad de fallo de cada modo. Con esta tabla el diseñador puede analizar cómo la calidad de los materiales, o la precisión en la construcción, influyen en la fiabilidad de la estructura. Por ejemplo, un incremento de 1 unidad en el coeficiente de fricción $\mu_{\mu_{cr}}$, sin cambiar los demás parámetros, supone un aumento aproximado del índice de fiabilidad β_s de 0,385, con la disminución de probabilidad de fallo que esto supone. Y un incremento del parámetro μ_{A_u} de 1 unidad, disminuye el índice de fiabilidad β_o en 4,145.

Similarmente, también se podrían dar las sensibilidades de los índices de fiabilidad con respecto a las variables de diseño.

8.3.7. Simulación de Monte Carlo

Para determinar la probabilidad de fallo global, entender mejor la interacción y correlación entre los modos de fallo, y estimar las probabilidades de fallo de todas las combina-

Cuadro 8.14: Sensibilidades de los índices de fiabilidad $\frac{\partial \beta_i}{\partial x}$, con respecto a los datos $x = (\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\kappa})$ del ejemplo del dique en talud. Valores positivos indican el aumento del índice cuando el parámetro correspondiente aumenta en una unidad.

Dato x	$\frac{\partial \beta_o}{\partial x}$	$\frac{\partial \beta_s}{\partial x}$	$\frac{\partial \beta_a}{\partial x}$
γ_c	0.000	0.021	2.198
γ_s	0.000	0.000	0.000
γ_w	0.000	-0.048	-6.204
μ_{A_u}	-4.145	-0.708	0.000
μ_{B_u}	2.239	0.431	0.000
$\mu_{\mu_{cr}}$	0.000	0.385	0.000
μ_{A_r}	0.000	0.000	-308.402
μ_{B_r}	0.000	0.000	-0.158
μ_{c_f}	0.000	-0.336	0.000
μ_{h_1}	-0.028	-0.167	-0.258
μ_{h_2}	-0.028	-0.167	-0.258
σ_{A_u}	-32.994	-3.343	0.000
σ_{B_u}	-6.032	-0.783	0.000
$\sigma_{\mu_{cr}}$	0.000	-0.091	0.000
v_{A_r}	0.000	0.000	-47.323
v_{B_r}	0.000	0.000	-23.132
v_{C_f}	0.000	-0.587	0.000
σ_{h_1}	-0.019	-0.162	-0.245
σ_{h_2}	-0.001	-0.104	-0.114

Cuadro 8.15: Simulación de Monte Carlo para estimar las probabilidades de fallo para cada combinación posible de modos de fallo.

Tipo de fallo	Probabilidad
\emptyset	0,99890
$\{o\}$	0,00010
$\{s\}$	0,00039
$\{a\}$	0,00044
$\{o\} \cup \{s\}$	0,00015
$\{o\} \cup \{a\}$	0,00000
$\{s\} \cup \{a\}$	0,00002
$\{o\} \cup \{s\} \cup \{a\}$	0,00000

ciones de fallo posibles, se realiza una simulación de Monte Carlo de 10^9 réplicas. La tabla 8.3.7 muestra los fallos de todas las combinaciones posibles, y la probabilidad de fallo global que es de 0,0011. Las probabilidades asociadas a al rebase, deslizamiento y estabilidad de las piezas del manto son 0,00025, 0,00056 y 0,00046, respectivamente.

Obsérvese en primer lugar, que las probabilidades de deslizamiento y extracción de piezas del manto son menores que las determinadas mediante el método FORM que coinciden con las máximas permitidas de 0,001, pero son del mismo orden de magnitud, con lo que puede considerarse un diseño adecuado a este respecto. Sin embargo, la probabilidad de rebase es mucho menor que la máxima exigida de 0,01. Por qué entonces, no trata de reducir la altura de ataque del muro del espaldón para que sea más barato. La respuesta es sencilla, y se debe a las simplificaciones del modelo. Dado que se ha de aumentar el peso del espaldón para reducir la probabilidad de deslizamiento, y como no hemos impuesto restricciones relativas al hundimiento de la cimentación, al modelo le resulta más barato aumentar el peso del espaldón aumentando el muro de ataque en vez de aumentar gradualmente todo el espaldón.

8.3.8. Notación

- A_c : cota de la berma.
- A_r : constante adimensional para la definición de la función de estabilidad.
- A_u : coeficiente adimensional que depende del tipo de piezas del manto principal.
- a : espesor del manto principal.
- B_r : constante adimensional para la definición de la función de estabilidad.
- B_u : coeficiente adimensional que depende del tipo de piezas del manto principal.
- b : espesor del manto secundario.
- C_{al} : coste del manto principal por unidad de volumen.
- C_c : coste del hormigón por unidad de volumen.
- C_{co} : coste del núcleo por unidad de volumen.
- C_f : coeficiente experimental aleatorio.
- C_{ul} : coste del manto secundario por unidad de volumen.
- c : altura del núcleo.
- D : vida útil.
- D_{WL} : nivel del mar de diseño.
- \mathbf{d} : variables de diseño.
- d : anchura de la berma en el lado de barlovento.
- e : anchura del espaldón.
- F_a : coeficiente de seguridad a la estabilidad del manto principal.
- F_a^0 : límite inferior del coeficiente de seguridad a la estabilidad del manto principal.
- F_c : francobordo.
- F_h : fuerza horizontal actuante sobre el espaldón debido a la presión del oleaje.
- F_o : coeficiente de seguridad al rebase.
- F_o^0 : límite inferior del coeficiente de seguridad al rebase.
- F_s : coeficiente de seguridad frente al deslizamiento del espaldón.
- F_s^0 : límite inferior del coeficiente de seguridad frente al deslizamiento del espaldón.
- F_v : subpresión bajo el espaldón.
- f : anchura de la berma en el lado de sotavento.
- g : aceleración de la gravedad.
- H : altura de ola.
- H_D : altura de ola máxima.
- H_s : altura de ola significativa.
- h_1 : marea astronómica.
- h_2 : marea meteorológica.
- I_r : número de Iribarren.
- I_{r_0} : constante adimensional.
- L : longitud de onda.
- ℓ : longitud de lado del cubo del manto principal.
- ℓ_e : longitud de lado equivalente del manto secundario.
- n : recubrimiento del espaldón a sotavento.
- p_i^0 : límite superior de la probabilidad de fallo del modo i .
- P_{S_0} : presión del agua sobre el espaldón inducida por el oleaje.

p : espesor en la coronación del espaldón.	β_a : índice de fiabilidad respecto a la estabilidad del manto principal.
q : altura de la coronación del espaldón.	β_o : índice de fiabilidad respecto al rebase.
R : constante adimensional que depende de γ_c y γ_w .	β_s : índice de fiabilidad respecto al deslizamiento del espaldón.
R_u : run-up.	β_i^k : límite inferior del índice de fiabilidad del modo i para la iteración k .
r : longitud de la lengua del dique.	β_a^0 : límite inferior del índice de fiabilidad respecto a la estabilidad del manto principal.
S_0 : altura de ola equivalente debido al run-up.	β_o^0 : límite inferior del índice de fiabilidad respecto al rebase.
s : altura del bloque principal del espaldón.	β_s^0 : límite inferior del índice de fiabilidad respecto al deslizamiento del espaldón.
T : periodo de la ola.	γ_c : peso específico del hormigón.
T_p : periodo de pico de la ola.	γ_s : peso específico de la escollera.
t : altura de la lengua del dique.	γ_w : peso específico del agua.
tr : carrera de marea.	$\boldsymbol{\eta}$: conjunto de parámetros del diseño clásico.
U : variable aleatoria uniforme.	$\boldsymbol{\phi}$: conjunto de variables básicas usadas en los modelos probabilistas.
V_c : volumen total de hormigón.	$\boldsymbol{\psi}$: variables auxiliares (no básicas) cuyos valores se obtienen de las básicas, de los parámetros y de las de diseño ($\mathbf{d}, \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\phi}$).
V_1 : volumen total del manto principal.	$\boldsymbol{\kappa}$: conjunto de parámetros que definen la variabilidad y dependencia de las variables aleatorias.
V_2 : volumen total del manto secundario.	$\tilde{\boldsymbol{\eta}}$: valores medios de $\boldsymbol{\eta}$.
V_3 : volumen total del núcleo.	$\tilde{\boldsymbol{\phi}}$: valores medios de $\boldsymbol{\phi}$.
v_{A_r} : coeficiente de variación de A_r .	$\tilde{\boldsymbol{\psi}}$: valores medios de $\boldsymbol{\psi}$.
v_{B_r} : coeficiente de variación de B_r .	λ : constante adimensional.
v_{C_f} : coeficiente de variación de C_f .	μ_{A_r} : valor medio de A_r .
W : peso de las piezas del manto principal.	μ_{B_r} : valor medio de B_r .
W_f : peso sumergido del espaldón.	
W_1 : peso del espaldón.	
z_p : cero del puerto.	
α : constante adimensional.	
α_ℓ : ángulo del talud a sotavento.	
α_s : ángulo del talud a sotavento.	

μ_{A_u} : valor medio de A_u .

μ_{B_u} : valor medio de B_u .

μ_{C_f} : valor medio de C_f .

μ_c : coeficiente de rozamiento.

μ_{μ_c} : valor medio de μ_c .

σ_{A_u} : desviación típica de A_u .

σ_{B_u} : desviación típica de B_u .

σ_{μ_c} : desviación típica de μ_c .

Φ_e : función de estabilidad.

8.4. Estabilidad de Taludes

En esta sección se describe con detalle la aplicación de las técnicas de optimización al cálculo de la estabilidad de taludes. El estudio de la estabilidad de taludes ha sido un tema muy tratado por investigadores geotécnicos en sus dos vertientes: (a) aproximación clásica, basada en coeficientes de seguridad, y (b) la moderna, que utiliza probabilidades de fallo (véase Wu y Kraft [173], Cornell [51], Li y Lumb [107], Alonso [5], Tang, Yüemen y Ang [158], Venmarcke [166], Wolff [172], Barabosa, Morris y Sarma [11], Dai, Fredlund y Stolte [52] y Christian, Ladd y Baecher [47]). La aproximación clásica se cuestiona porque no da una idea de lo lejos que se está del fallo, y se demanda un diseño basado en técnicas probabilistas (véase Ditlevsen y Madsen [67], Wirsching y Wu [170], y Wu, Burnside y Cruse [174]). Sin embargo, la aproximación moderna también se critica por la sensibilidad a las hipótesis estadísticas, especialmente al comportamiento en las colas (véase Galambos [84], Castillo [27], y Castillo et al. [43, 42]).

Un análisis clásico del problema consiste en determinar los coeficientes de seguridad asociados a una colección de líneas seleccionadas por el ingeniero, y elegir aquella que tiene el mínimo coeficiente que será tomado como el coeficiente de seguridad del talud. El conjunto de líneas de deslizamiento es normalmente una familia paramétrica. Sin embargo, dado que este conjunto no cubre todas las líneas posibles, este procedimiento no garantiza obtener el mínimo. Esto en un principio no es problema si el coeficiente está cerca del mínimo, pero puede serlo si está lejos.

Alternativamente, puede usarse una aproximación no paramétrica. La más importante es la basada en el cálculo de variaciones, que se ha aplicado a la mecánica de suelos en el pasado (véase, por ejemplo, Chen y Giger [45], Chen y Snitbhan [46], Baker y Garber [9, 10, 85], Revilla y Castillo [138], y Castillo y Luceño [35, 36]). Esta técnica es una generalización del problema de máximos y mínimos, en el que se busca el valor máximo o mínimo de funcionales, en vez de funciones. Un funcional es una aplicación del conjunto de funciones $y(x)$ que representa la línea de deslizamiento, en un número real que representa el coeficiente de seguridad del talud. Por lo tanto, el funcional asocia a cada línea de deslizamiento su correspondiente coeficiente de seguridad. En la mayoría de las aproximaciones, el funcional se define como el cociente entre dos integrales, que representan el ratio entre fuerzas y momentos estabilizadores y desestabilizadores.

Pero esto no es todo, como puntualizó Cornell [51], la fiabilidad de un sistema es la de todas sus superficies potencialmente deslizantes, y por tanto la probabilidad de fallo de un sistema será mayor que la probabilidad para una simple línea. La diferencia entre ellas dependerá de la correlación entre las probabilidades de fallo de las diferentes líneas.

La aproximación mediante el cálculo de variaciones tiene claras ventajas sobre otras metodologías, porque: (a) en la aproximación clásica, se garantiza la obtención de la línea pésima, es decir, no hay ninguna línea con menor coeficiente de seguridad, y (b) en la aproximación moderna, se garantiza la obtención de la línea pésima con menor índice de fiabilidad, es decir, con mayor probabilidad de fallo.

Finalmente, una vez que se ha seleccionado la línea pésima, es interesante efectuar un estudio de sensibilidad para saber cómo y cuánto influyen los parámetros en la seguridad.

En esta sección se presentan tres contribuciones: (a) una aproximación variacional al problema de la estabilidad de taludes, que evita la necesidad de utilizar familias paramétricas

particulares, (b) un nuevo método que combina coeficientes de seguridad y probabilidades de fallo, y (c) herramientas potentes para el estudio de sensibilidad.

El capítulo se estructura de la siguiente manera. En la subsección 8.4.1 se introduce el método del cálculo variacional. En las subsecciones 8.4.2 y 8.4.3 se describe como pueden resolver diferentes problemas asociados a la estabilidad de taludes ingenieros clásicos y probabilistas mediante el cálculo variacional. En la subsección 8.4.4 se presenta el método combinado. La subsección 8.4.5 tratan problemas de sensibilidad. Y finalmente, en la subsección 8.4.6 se recogen varias conclusiones relativas a la metodología.

8.4.1. Aproximación mediante cálculo variacional

En una publicación reciente de la revista *Structural Safety*, Malkawi et al. [116] realizaron un análisis muy interesante de la fiabilidad de la estabilidad de taludes mediante técnicas de simulación de Monte Carlo, y métodos de primer (FORM) y segundo orden (SORM) con cuatro métodos diferentes (ordinario y simplificado de Bishop, Janbu y Spencer) para el análisis de la estabilidad de taludes, y llegaron a la conclusión que con las hipótesis estadísticas con las que trabajaban no había diferencias significativas en los resultados obtenidos con cada uno de los métodos mencionados. Este hecho, justifica la selección del método de Janbu en nuestro análisis, aunque no sería complicado implementar otro método de estabilidad.

Revilla y Castillo [138], Castillo y Revilla [40], o Castillo y Luceño [32, 33, 34], basándose en el método de Janbu (véase Janbu [97]), propusieron el siguiente funcional:

$$F = \frac{\int_{x_1}^{x_{n+1}} \left[\frac{c}{\gamma} + (\bar{y}(x) - y(x)) \tan \phi \right] (1 + y'^2(x))}{1 + \frac{y'(x) \tan \phi}{F}} dx}{\int_{x_1}^{x_{n+1}} (\bar{y}(x) - y(x)) y'(x) dx} \quad (8.173)$$

donde F es el coeficiente de seguridad, $\bar{y}(x)$ es el perfil del talud (ordenada en el punto x), c es la cohesión del terreno, ϕ es el ángulo de fricción interna, γ es el peso específico del terreno y x_1 y x_{n+1} son las abscisas del principio y el final de la línea de rotura o deslizamiento.

Un aspecto muy importante en el que el ingeniero ha de ser muy cuidadoso es la selección del funcional asociado a la estabilidad. De hecho, Castillo y A. Luceño [33] demostraron que ciertos funcionales propuestos en el pasado no están acotados, y no son válidos para el diseño. En concreto, probaron que otros funcionales, como el (8.173), están acotados, y consecuentemente, son válidos para el diseño.

Nótese que (8.173), para un talud predefinido $\bar{y}(x)$, involucra la utilización de cinco variables importantes ϕ, c, γ, H y F , es decir, se está tratando con un espacio de 5 dimensiones. Por supuesto se puede trabajar con estas variables, pero se complica las cosas innecesariamente y no permite comprender en su totalidad la estructura de los problemas de estabilidad.

De hecho, utilizando el análisis dimensional, mediante el teorema de Π , se puede compro-

bar que la expresión (8.173) puede reescribirse en función de tres variables adimensionales

$$\{F, N = \frac{c}{\gamma H}, \psi = \tan \phi\} \quad (8.174)$$

como

$$F = \frac{\int_{u_1}^{u_{n+1}} \frac{[N + (\bar{z}(u) - z(u))\psi](1 + z'^2(u)) du}{1 + \frac{\psi z'(u)}{F}}}{\int_{u_1}^{u_{n+1}} (\bar{z}(u) - z(u)) z'(u) du} \quad (8.175)$$

donde

$$u = \frac{x}{H} \quad (8.176)$$

es la variable adimensional asociada a la coordenada x , y

$$z(u) = \frac{y(uH)}{H} \quad (8.177)$$

$$\bar{z}(u) = \frac{\bar{y}(uH)}{H} \quad (8.178)$$

son el perfil del talud y la línea de deslizamiento adimensionales, respectivamente.

Esto nos permite estudiar el problema en un espacio tridimensional, revelándonos que, mientras los valores adimensionales de N y ψ en la ecuación (8.174) permanezcan constantes, tanto el factor de seguridad, como la línea de deslizamiento y el perfil adimensionales permanecen también constantes.

Por ejemplo, los coeficientes de seguridad asociados a dos taludes con $\psi = 0,6, c = 20kN/m^2, \gamma = 21kN/m^3$ y $H = 10m$, y $\psi = 0,6, c = 2kN/m^2, \gamma = 21kN/m^3$ y $H = 1m$ son idénticos.

La expresión (8.175) muestra que dados $\bar{z}(u)$ y $z(u)$, hay una relación entre F, N y ψ :

$$F = H(N, \psi) \quad (8.179)$$

Sin embargo, se puede ir más lejos, si se da uno cuenta que en la expresión (8.175), N, ψ y F pueden multiplicarse por una constante arbitraria k , y se sigue manteniendo la misma relación, es decir,

$$kF = kH(N, \psi) = H(kN, k\psi) \quad (8.180)$$

en otras palabras, satisface una ecuación funcional, conocida como ecuación funcional de las funciones homogéneas, cuya solución general puede escribirse como ² (véase Aczél [3], Castillo y Ruiz [41]):

$$\frac{F}{\psi} = h\left(\frac{N}{\psi}\right) \Leftrightarrow F^* = h(N^*) \quad (8.181)$$

²Se supone que la función $H(\cdot, \cdot)$ realmente depende de las variables N y ψ .

Esto permite expresar nuestro problema en términos de dos variables adimensionales $F^* = F/\psi$ y $N^* = N/\psi$. De hecho, (8.175) puede escribirse como

$$1 = \frac{\int_{u_1}^{u_{n+1}} \frac{[N^* + (\bar{z}(u) - z(u))](1 + z'^2(u))}{F^* + z'(u)} du}{\int_{u_1}^{u_{n+1}} (\bar{z}(u) - z(u)) z'(u) du} \quad (8.182)$$

Por supuesto, se podría haber comenzado la exposición del capítulo con la fórmula (8.182) en vez de (8.173), pero esta decisión haría pasar por alto la belleza y potencia del análisis dimensional, por un lado, y de las ecuaciones funcionales por otro.

Una conclusión importante es que nuestro problema ha quedado reducido a dos variables que definen la naturaleza y fiabilidad del talud. Por tanto, nuestro problema se reduce a

$$\begin{array}{l} \text{Minimizar } F^* \\ u_1, u_{n+1}, z(u) \end{array}$$

sometido a (8.182) y $N^* = N_0$. Si se resuelve el problema con diferentes valores de N_0 se puede elaborar una gráfica relacionando F^* y N^* con la que se puede obtener el coeficiente de seguridad F asociado a cualquier combinación de variables dato ϕ, c, γ y H .

La implementación del cálculo de variaciones a la estabilidad de taludes consiste en minimizar, como ya se ha dicho antes, F^* con respecto a u_1, u_{n+1} y $z(u)$. Este problema puede resolverse analíticamente, sin embargo, conduce a sistemas de ecuaciones muy complicados y condiciones de transversalidad (véase Luceño [112]). La alternativa obvia consiste en una aproximación numérica, que es la opción seleccionada en esta sección.

8.4.2. Discretización del problema

Usando las siguientes fórmulas (véase la figura 8.17):

$$\Delta u = \frac{u_{n+1} - u_1}{n} \quad (8.183)$$

$$u_i = u_1 + (i - 1)\Delta u \quad (8.184)$$

$$v_i = \frac{z_{i+1} + z_i}{2} \quad (8.185)$$

$$v'_i = \frac{z_{i+1} - z_i}{\Delta u} \quad (8.186)$$

$$\bar{v}_i = \bar{z}(u_i + \Delta u/2) \quad (8.187)$$

la ecuación (8.182) puede ser fácilmente discretizada como

$$1 = \frac{\sum_{i=1}^n \frac{[N^* + (\bar{v}_i - v_i)](1 + v_i'^2)\Delta u}{F^* + v'_i}}{\sum_{i=1}^n (\bar{v}_i - v_i)v'_i\Delta u} \quad (8.188)$$

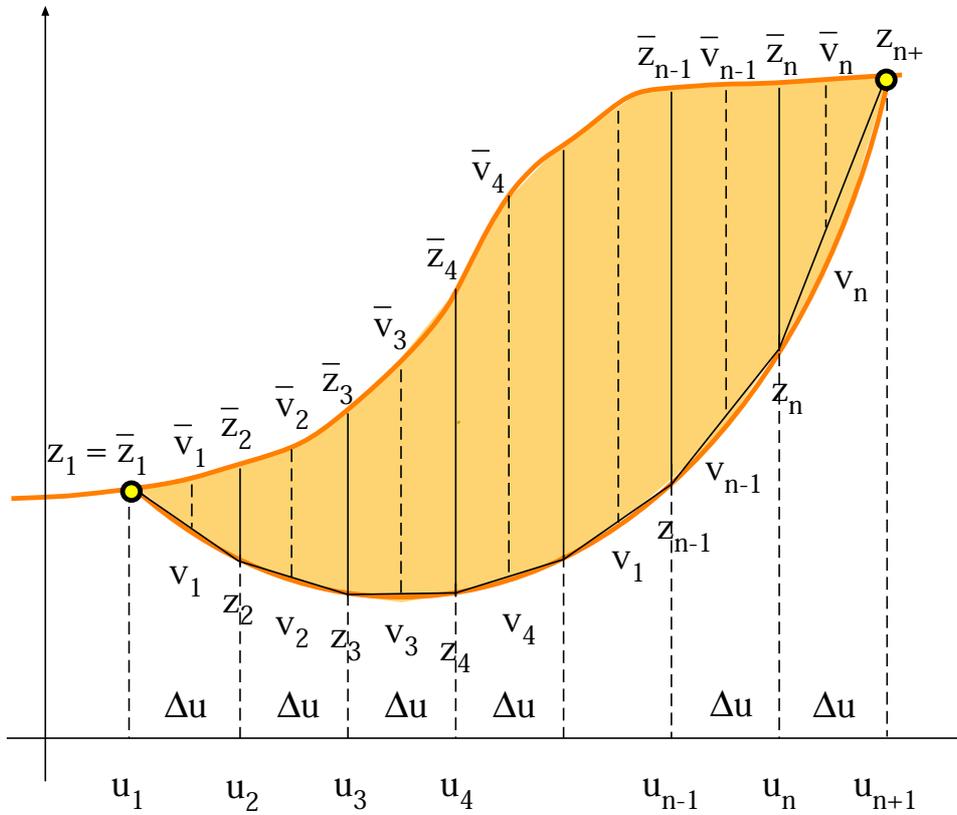


Figura 8.17: Ilustración gráfica del problema de estabilidad de taludes, mostrando la línea de deslizamiento y la discretización seleccionada.

Entonces, el análisis de la estabilidad de un talud se reduce a

$$\begin{aligned} & \text{Minimizar} && F^* && (8.189) \\ & u_0, u_{n+1}, z_i : i = 2, \dots, n \end{aligned}$$

sujeto a

$$\sum_{i=1}^n \left[(\bar{v}_i - v_i) v'_i - \frac{[N^* + (\bar{v}_i - v_i)](1 + v_i'^2)}{F^* + v'_i} \right] = 0 \quad (8.190)$$

$$\bar{z}_j = z_j; \quad j = 1, n + 1 \quad (8.191)$$

$$N^* = N_0^* = c/(\gamma H \psi) \quad (8.192)$$

Lo más importante de la aplicación del cálculo de variaciones es que a cada combinación de parámetros del suelo c, ϕ, γ y altura del talud H , proporciona un único valor del coeficiente de seguridad pésimo F , es decir, nos informa si se produce ($F < 1$) o no el fallo del talud ($F > 1$) y además cual es la línea de deslizamiento pésima. En otras palabras, se tiene una idea clara del comportamiento del sistema y no de una línea determinada.

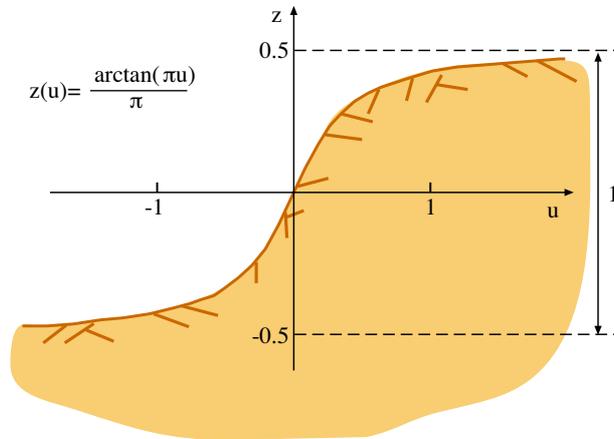


Figura 8.18: Perfil del talud seleccionado para el ejemplo ilustrativo.

8.4.3. Aproximación Clásica

En esta sección se resuelve el problema de la estabilidad mediante el método clásico basado en coeficientes de seguridad, es decir, se supone que todos los parámetros son deterministas.

Obtención de la relación entre N^* y F^*

Como ejemplo, en esta subsección se supone un perfil de talud arcotangente (véase la figura 8.18)

$$y(x) = H \arctan(\pi x/H)/\pi; \quad -\infty < x < \infty$$

que implica

$$z(u) = \arctan(\pi u)/\pi; \quad -\infty < u < \infty.$$

Resolviendo el problema (8.189)-(8.192), para todos los valores posibles del factor adimensional N^* , se puede obtener una gráfica que determine el coeficiente de seguridad para cualquier N^* . Este gráfico se muestra en la figura 8.19, donde se muestran los valores óptimos de F^* en función de N^* ($F^* = h(N^*)$). Las líneas de deslizamiento correspondientes se muestran en la figura 8.20. Estos gráficos permiten resolver gráficamente cualquier problema por el método clásico.

Solución Clásica de Problemas de Estabilidad de Taludes

Los problemas asociados a la estabilidad pueden presentarse en formas diferentes, tales como:

Problema tipo 1: Obtención del máximo valor permitido de N^* para un valor fijo de ψ y un coeficiente de seguridad F . En este caso se calcula $F^* = F/\psi$, se entra directamente en el gráfico de la figura 8.19 y se determina el valor de N^* buscado.

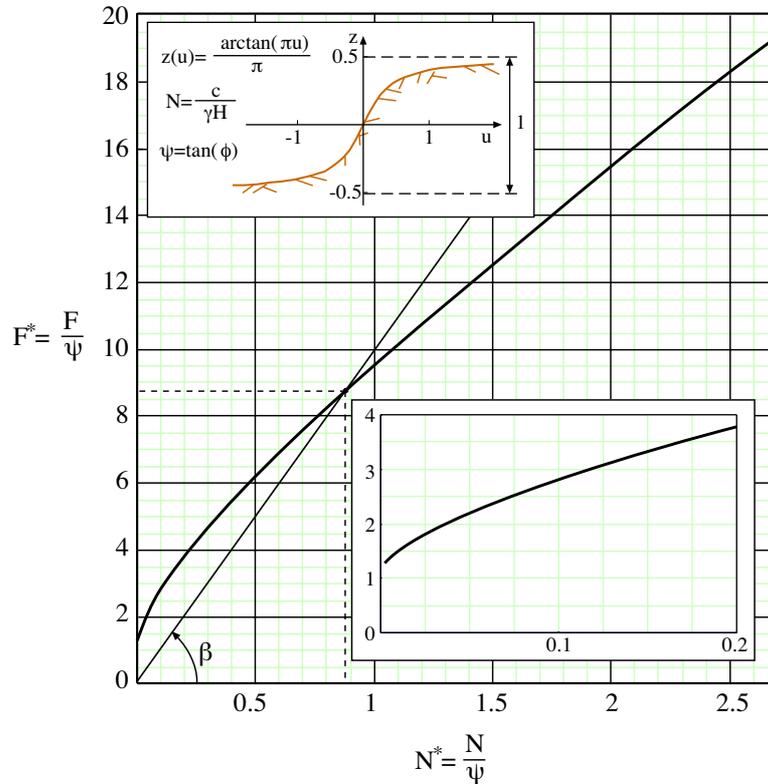


Figura 8.19: Valores óptimos de F^* en función de N^* y zona ampliada en el entorno de origen.

Una vez que se tiene N^* , se puede calcular el valor de H en función de los parámetros del terreno c, γ, ψ , como $H = \frac{c}{N^* \gamma \psi}$, o el valor de c , en función de H, γ and ψ , como $c = N^* \gamma H \psi$.

Ejemplo computacional 8.1 (Problema tipo 1). Supóngase que se desea diseñar un talud con un coeficiente de seguridad $F = 2$ y $\phi = 10^\circ \equiv 1/\psi = 1/\tan(\phi) = 5,67$. En este caso $F^* = 2 \times 5,67 = 11,34$, entrando en el gráfico de la figura 8.19 se obtiene $N^* = 1,27$.

Si $c = 200kN/m^2$ y $\gamma = 23kN/m^3$, entonces la altura del talud debe ser de $H = \frac{200 \times 5,67}{1,27 \times 23} = 38,83m$, o, si $H = 30m$, $\gamma = 23kN/m^3$ y $\psi = 1/5,67 = 0,176$, entonces, el valor de diseño es $c = 1,27 \times 23 \times 30 \times 0,176 = 154,5kN/m^2$. ■

Problema tipo 2: Obtención del valor ψ requerido para unos valores dados de H, γ, c y del coeficiente de seguridad F . En este caso puede parecer en un principio que se necesite un método iterativo, porque ψ aparece tanto en N^* como en F^* . Para evitar este procedimiento se puede descomponer el gráfico de la figura 8.19 en uno equivalente

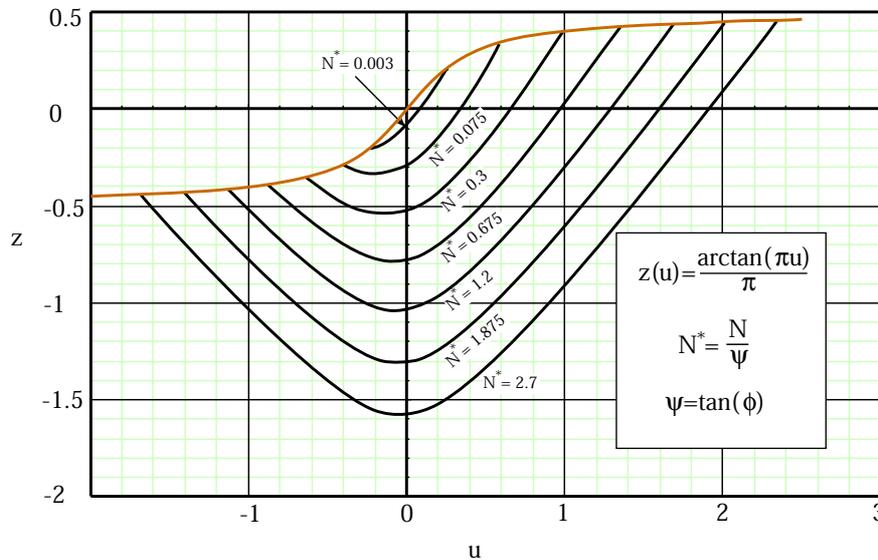


Figura 8.20: Líneas de deslizamiento críticas para diferentes valores de N^* .

(véase la figura 8.21), donde la relación F^* y N^* se transforma en muchas relaciones entre ψ , N y F , rompiendo la relación (8.181), con lo cual sólo se ha de entrar en la gráfica con N y F y obtener el valor de ψ . Aunque se puede utilizar también el gráfico inicial (figura 8.19) con la recta que parte del origen con pendiente $\beta = F^*/N^* = F/N$ (véase la figura 8.19), con lo cual se elimina el parámetro ψ . La intersección de esa recta con la curva crítica será el punto buscado, no hay más que despejar ψ de cualquiera de las variables N^* o F^* .

Ejemplo computacional 8.2 (Problema tipo 2). Supóngase que $H = 30\text{m}$, $\gamma = 23\text{kN/m}^3$, $c = 200\text{kN/m}^2$ y $F = 2$. Entrando en el gráfico de la figura 8.21, con $N = \frac{200}{23 \times 30} = 0,2899$ y $F = 2$, se obtiene $\psi = 0,08$. Se conseguiría el mismo resultado trazando la recta de pendiente $\beta = 2/0,2899$ y tomando el punto intersección de la misma con la curva crítica. ■

Problema tipo 3: Obtención del valor del coeficiente de seguridad F para unos valores de H, γ, c y ψ conocidos. En este caso se calcula $N^* = \frac{c}{H\gamma\psi}$, se entra en el gráfico de la figura 8.19, se determina F^* y se calcula el valor de $F = F^*\psi$.

Ejemplo computacional 8.3 (Problema tipo 3:). Si $H = 30\text{m}$, $\gamma = 23\text{kN/m}^3$, $c = 200\text{kN/m}^2$ y $\psi = 0,176$, se calcula $N^* = \frac{200}{30 \times 23 \times 0,176} = 1,647$, entrando en el gráfico correspondiente, se obtiene $F^* = 13,35$ y finalmente se obtiene el valor de F , $F = 13,35 \times 0,176 = 2,355$. ■

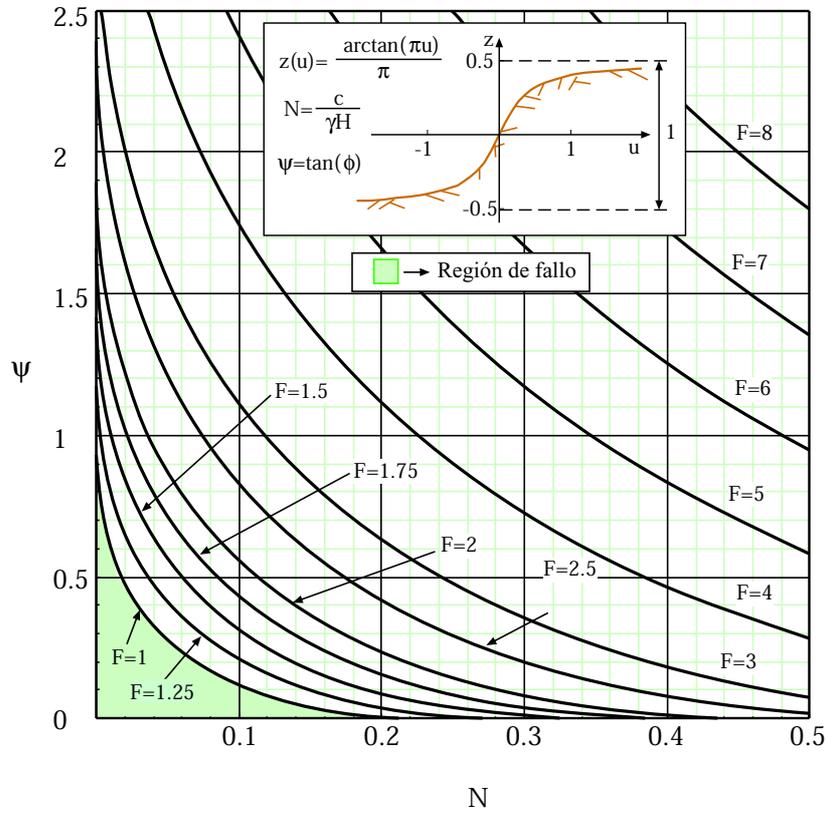


Figura 8.21: Valores óptimos de F en función N .

8.4.4. Aproximación moderna.

Contrariamente a las hipótesis de la subsección anterior, se supone que todas las variables son aleatorias. Dado que el problema de la probabilidad de fallo depende sólo de dos variables $F^+ = 1/\psi$ y N^* , ó de ψ y N se puede trabajar sólo con ellas. Nótese que dado que en punto de fallo $F = 1$, F^+ es distinto de F^* . Posiblemente uno esté tentado en trabajar con c, γ, ϕ y H , y hacer ciertas hipótesis sobre la función de densidad conjunta. Sin embargo, dado que el problema depende sólo de dos variables, el resultado final dependerá sólo de la función de densidad conjunta de las variables (F^+, N^*) ó (ψ, N) , y sin pérdida de generalidad, se puede trabajar sólo con ellas.

Todos los trabajos existentes en la actualidad no tienen en cuenta este hecho, y tratan de obtener distribuciones que se adecúen a los valores de c, γ, ϕ cuando su influencia en la estabilidad del sistema depende de N y ψ .

Cálculo del índice de fiabilidad para un diseño dado

Para simplificar nuestro tratamiento se supone que F^+ y N^* son variables normales, pero dependientes, porque el parámetro ψ aparece en F^+ y N^* . De forma más precisa se

considera:

$$F^+ \sim N(\mu_{F^+}, \sigma_{F^+}^2); \quad N^*|F^+ \sim N(\mu_{N^*} + \beta_0(F^+ - \mu_{F^+}), \sigma_{N^*|F^+}^2)$$

donde μ_{F^+} y μ_{N^*} son las medias de F^+ y N^* , respectivamente, $\sigma_{F^+}^2$ es la varianza de F^+ , $N^*|F^+$ es N^* condicionada sobre F^+ , $\sigma_{N^*|F^+}^2$ es la varianza de N^* dada F^+ , y β_0 es el coeficiente de regresión de N^* sobre F^+ . En lo que sigue, se supone que $\mu_{F^+} = F_0^+$ y $\mu_{N^*} = N_0^*$, es decir, que son iguales a los valores de diseño clásicos F_0^+ y N_0^* , respectivamente.

Una vez más, para calcular la probabilidad de fallo se necesita transformar el conjunto inicial de variables en un conjunto de variables normales estándar independientes usando la transformación de Rosenblatt (véase Rosenblatt [140], Ditlevsen y Madsen [67] y Madsen, Krenk y Lind [114]):

$$\begin{aligned} Z_{F^+} &= \frac{F^+ - \mu_{F^+}}{\sigma_{F^+}} = \frac{F^+ - \mu_{F^+}}{v_{F^+} \mu_{F^+}} \\ Z_{N^*} &= \frac{N^* - \mu_{N^*} - \beta_0(F^+ - \mu_{F^+})}{\sigma_{N^*|F^+}} = \frac{N^* - \mu_{N^*} - \beta_0(F^+ - \mu_{F^+})}{v_{N^*|F^+} \mu_{N^*}} \end{aligned} \quad (8.193)$$

donde v_{F^+} es el coeficiente de variación de F^+ , y $v_{N^*|F^+}$ es el coeficiente de variación de N^* , dado F^+ .

Así, el cálculo de índice de fiabilidad β se reduce a:

$$\text{Minimizar } \beta = \sqrt{Z_{F^+}^2 + Z_{N^*}^2} \quad (8.194)$$

sujeto a

$$\begin{aligned} Z_{F^+} &= \frac{F^+ - \mu_{F^+}}{\sigma_{F^+}} = \frac{F^+ - \mu_{F^+}}{v_{F^+} \mu_{F^+}} \\ Z_{N^*} &= \frac{N^* - \mu_{N^*} - \beta_0(F^+ - \mu_{F^+})}{\sigma_{N^*|F^+}} = \frac{N^* - \mu_{N^*} - \beta_0(F^+ - \mu_{F^+})}{v_{N^*|F^+} \mu_{N^*}} \\ F^+ &= h(N^*) \end{aligned} \quad (8.195)$$

Dado que se resuelve el problema de forma adimensional, se están resolviendo infinitos problemas a la vez. Para aplicar el método a un caso concreto basta transformar los valores óptimos adimensionales a los correspondientes dimensionales.

A continuación se van a presentar dos métodos diferentes: aproximaciones 1 y 2.

Aproximación 1

Desafortunadamente, no existe una expresión explícita que relacione F^+ en términos de N^* ($F^+ = h(N^*)$). Así, una forma de abordar el problema es obtener (usando mínimos cuadrados, etc.) una expresión analítica aproximada $F^+ = \tilde{h}(N^*)$, por ejemplo un polinomio de grado m . El siguiente polinomio de grado 8 proporciona una buena aproximación

$$\begin{aligned} F^+ &= 1,35 + 18,19N^* - 46,6N^{*2} + 111,26N^{*3} - 155,56N^{*4} \\ &\quad + 127,52N^{*5} - 60,23N^{*6} + 15,14N^{*7} - 1,565N^{*8} \end{aligned}$$

Aproximación 2

Dado que la región de fallo se determina mediante un procedimiento de optimización (8.189)-(8.192), el problema ha de resolverse mediante un procedimiento iterativo, como el dado en el siguiente algoritmo basado en el método de la bisección:

Algoritmo 8.1 (Cálculo del índice de fiabilidad β).

Entrada: Parámetros estadísticos del problema $\mu_{F^+}, \mu_{N^*}, v_{F^+}, v_{N^*|F^+}$ y β_0 , y una tolerancia ϵ para controlar la convergencia del proceso.

Salida: Valores óptimos de N^* y F^+ y el índice de fiabilidad β .

Etapa 1. Selección de dos valores iniciales, uno muy pequeño $N_1^* = 0,001$ y otro muy alto $N_2^* = 5$, y calcular sus respectivos valores de fallo F_1^+ y F_2^+ , resolviendo el problema (8.189)-(8.192) para cada valor. Esto es equivalente a entrar en el gráfico de la figura 8.19.

Etapa 2. Cálculo de los valores β_1 y β_2 asociados con los pares (N_1^*, F_1^+) y (N_2^*, F_2^+) , respectivamente, utilizando las expresiones (8.193) y (8.194).

Etapa 3. Si $|\beta_1 - \beta_2| < \epsilon$, ir a la etapa 7. Si no, hacer $N_3 = 0,51N_1 + 0,49N_2$ y $N_4 = 0,49N_1 + 0,51N_2$.

Etapa 4. Cálculo de sus respectivos valores de fallo F_3^+ and F_4^+ , resolviendo el problema de optimización (8.189)-(8.192), o entrando en el gráfico de la figura 8.19.

Etapa 5. Cálculo de los índices de fiabilidad β_3 y β_4 asociados a los puntos (N_3^*, F_3^+) y (N_4^*, F_4^+) , respectivamente.

Etapa 6. Si $\beta_4 < \beta_3$ hacer $N_1^* = N_3$; $F_1^+ = F_3^+$ y $\beta_1 = \beta_3$. Si no, $N_2^* = N_4$; $F_2^+ = F_4^+$ y $\beta_2 = \beta_4$, e ir a la etapa 3.

Etapa 7. Devolver $N^* = (N_1^* + N_2^*)/2$, $F^+ = (F_1^+ + F_2^+)/2$ y $\beta = (\beta_1 + \beta_2)/2$. ■

Solución moderna de problemas de estabilidad

Dado que en esta aproximación se requiere que el talud diseñado tenga un índice de fiabilidad mayor que un valor mínimo dado β^0 , como es posible que el diseño seleccionado no cumpla esta restricción, el proceso debe repetirse hasta que se cumple la restricción.

El problema puede plantearse de dos formas distintas como:

Problema tipo 1: Obtención del valor μ_{N^*} para unos valores dados de $\mu_{F^+}, v_{F^+}, v_{N^*|F^+}$, y límite inferior del índice de fiabilidad β^0 . El problema puede plantearse como:

$$\text{Minimizar } \beta = \sqrt{Z_{F^+}^2 + Z_{N^*}^2} \quad (8.196)$$

$Z_{F^+}, Z_{N^*}, \mu_{N^*}$

Cuadro 8.16: Ilustración del procedimiento iterativo para el ejemplo computacional 8.4.

Iteración k	$\mu_{N^*}^{(k)}$	$\beta^{(k)}$
1	2.000	2.931
2	1.534	2.126
3	1.471	2.012
4	1.465	2.001
5	1.465	2.000
6	1.465	2.000

sujeto a

$$\begin{aligned}
 Z_{F^+} &= \frac{F^+ - \mu_{F^+}}{\sigma_{F^+}} = \frac{F^+ - \mu_{F^+}}{v_{F^+} \mu_{F^+}} \\
 Z_{N^*} &= \frac{N^* - \mu_{N^*} - \beta_0(F^+ - \mu_{F^+})}{\sigma_{N^*|F^+}} = \frac{N^* - \mu_{N^*} - \beta_0(F^+ - \mu_{F^+})}{v_{N^*|F^+} \mu_{N^*}} \quad (8.197) \\
 F^+ &= h(N^*) \\
 \beta &> \beta^0
 \end{aligned}$$

y resuelto mediante la expresión aproximada $\tilde{h}(N^*)$ for $h(N^*)$. Si no se dispone de la aproximación, se procede de la siguiente manera: se comienza con un valor inicial μ_{N^*} , se resuelve el problema (8.194)-(8.195), y se obtiene β . Si el valor resultante de β es menor que el valor β^0 requerido, se aumenta el valor de μ_{N^*} y se repite el proceso hasta que se consigue que $\beta = \beta^0$. Como aplicaciones de este caso se puede determinar H en términos de μ_{N^*}, γ, ψ y c , o c en términos de μ_{N^*}, γ, ψ y H .

Ejemplo computacional 8.4 (Problema tipo 1). Asumiendo que se tiene $\mu_{F^+} = 5,67$, $v_{F^+} = 0,1$, $v_{N^*|F^+} = 0,1$, $\beta_0 = 1$, y un límite inferior del índice de fiabilidad $\beta^0 = 2$. Entonces, la solución de (8.196)-(8.197) es

$$F^+ = 4,584; \quad \mu_{N^*} = 1,464; \quad N^* = 0,294; \quad \beta = 2.$$

Si, alternativamente, se usa el procedimiento descrito anteriormente, con un valor inicial de $\mu_{N^*} = 2$, se resuelve el problema (8.194)-(8.195), obteniendo $\beta = 2,931$. Como el resultado obtenido para β es mayor que el requerido $\beta^0 = 2$, se disminuye el valor de μ_{N^*} mediante la fórmula:

$$\mu_{N^*}^{(k+1)} = \mu_{N^*}^{(k+1)} + \rho(\beta^0 - \beta^{(k)}) = 2 + 0,5(2 - 2,931) = 1,534.$$

Después se repite el proceso hasta que $\beta = \beta^0$, como se ilustra en la tabla 8.16. ■

Problema tipo 2: Obtención del μ_{F+} requerido para un valor dado de β^0 y parámetros $\mu_N, v_{F+}, v_{N^*|F+}, \beta_0$.

Este problema puede plantearse como:

$$\begin{array}{l} \text{Minimizar} \\ Z_{F+}, Z_{N^*}, \mu_{F+} \end{array} \quad \beta = \sqrt{Z_{F+}^2 + Z_{N^*}^2} \quad (8.198)$$

sometido a

$$\begin{aligned} Z_{F+} &= \frac{F^+ - \mu_{F+}}{\sigma_{F+}} = \frac{F^+ - \mu_{F+}}{v_{F+}\mu_{F+}} \\ Z_{N^*} &= \frac{N^* - \mu_{N^*} - \beta_0(F^+ - \mu_{F+})}{\sigma_{N^*|F+}} = \frac{N^* - \mu_{N^*} - \beta_0(F^+ - \mu_{F+})}{v_{N^*|F+}\mu_{N^*}} \\ F^+ &= h(N^*) \\ \mu_{N^*} &= \mu_N\mu_{F+} \\ \beta &> \beta^0 \end{aligned} \quad (8.199)$$

y resuelto usando la aproximación $\tilde{h}(N^*)$ for $h(N^*)$. Si no se dispone de la expresión aproximada se procede de la forma siguiente: se selecciona un valor inicial de μ_{F+} , se calcula $\mu_{N^*} = \mu_N\mu_{F+}$, se resuelve el problema (8.194)-(8.195), y se obtienen β . Si el valor obtenido de β es menor que el valor mínimo requerido β^0 , se disminuye el valor de μ_{F+} y se repite el proceso hasta que se consigue que $\beta = \beta^0$. El valor final de μ_{F+} es el valor buscado.

Ejemplo computacional 8.5 (Problema tipo 1). Asumiendo que $\mu_N = 0,28$, $v_{F+} = 0,1$, $v_{N^*|F+} = 0,1$, $\beta_0 = 1$, y un límite inferior del índice de fiabilidad $\beta^0 = 2$. Entonces, la solución de (8.198)-(8.199) es

$$F^+ = 7,141; \quad N^* = 0,643; \quad \mu_{N^*} = 2,459; \quad \beta = 2.$$

■

Problema tipo 3: Obtención del índice de fiabilidad β para los parámetros estadísticos $\mu_{N^*}, \mu_{F+}, v_{F+}, v_{N^*|F+}, \beta_0, \mu_N$. En este caso, basta con resolver el problema (8.194)-(8.195), y obtener β .

Ejemplo computacional 8.6 (Problema tipo 3). Asumiendo que $\mu_{N^*} = 2$, $\mu_{F+} = 5,67$, $v_{F+} = 0,1$, $v_{N^*|F+} = 0,1$ y $\beta_0 = 1$, entonces, resolviendo el problema (8.194)-(8.195), se obtienen $\beta = 2,931$. ■

8.4.5. Método combinado de coeficientes de seguridad y probabilidades de fallo

En esta subsección se presenta el método que combina la aproximación clásica y la moderna, particularizado para el caso de estabilidad de taludes. La idea es diseñar un talud

(selección del valor de μ_{N^*}) tal que su coeficiente de seguridad F y su índice de fiabilidad β satisfagan $F > F^0$ y $\beta > \beta^0$, es decir:

$$\begin{aligned} & \text{Minimizar} & \beta &= \sqrt{Z_{F^+}^2 + Z_{N^*}^2} \\ & Z_{F^+}, Z_{N^*}, \mu_{N^*}, F \end{aligned} \quad (8.200)$$

sujeito a

$$\begin{aligned} Z_{F^+} &= \frac{F^+ - \mu_{F^+}}{\sigma_{F^+}} = \frac{F^+ - \mu_{F^+}}{v_{F^+} \mu_{F^+}} \\ Z_{N^*} &= \frac{N^* - \mu_{N^*} - \beta_0(F^+ - \mu_{F^+})}{\sigma_{N^*|F^+}} = \frac{N^* - \mu_{N^*} - \beta_0(F^+ - \mu_{F^+})}{v_{N^*|F^+} \mu_{N^*}} \\ F^+ &= h(N^*) \\ F \mu_{F^+} &= h(\mu_{N^*}) \\ F &> F^0 \\ \beta &> \beta^0 \end{aligned} \quad (8.201)$$

Para su solución puede utilizarse el siguiente algoritmo:

Algoritmo 8.2 (Método combinado con probabilidades de fallo y coeficientes de seguridad).

Entrada: Parámetros estadísticos $\mu_{F^+} = \mu_{1/\psi}$, v_{F^+} , $v_{N^*|F^+}$ y β_0 , límites inferiores del coeficiente de seguridad y del índice de fiabilidad F^0 y β^0 , un coeficiente actualizador ρ y una tolerancia ϵ para controlar la convergencia del proceso.

Salida: Coeficientes de seguridad real F^{actual} e índice de fiabilidad β , y los valores de diseño para los valores clásicos F^* y μ_{N^*} , y los modernos F^+ y N^* .

Etapas 1. Hacer $F^{actual} = F^0$ y $F^{previous} = F^0 + 2\epsilon$.

Etapas 2. Si $|F^{actual} - F^{previous}| < \epsilon$ ir a la etapa 6. Si no, hacer $F^{previous} = F^{actual}$, $F^* = F^{actual} \times \mu_{F^+}$.

Etapas 3. Resolver el problema (8.189) -(8.190) , o entrar en el gráfico de la figura 8.19 con F^* , para obtener μ_{N^*} .

Etapas 4. Resolver el problema de optimización (8.194)-(8.195), y obtener los valores de diseño F^+ y N^* , y β .

Etapas 5. Si $\beta > \beta^0$, entonces ir a la etapa 2. Si no, hacer $F^{actual} = F^{actual} + \rho(\beta^0 - \beta)$ e ir a la etapa 2.

Etapas 6. Devolver F^{actual} , β , F^* , μ_{N^*} , F^+ y N^* .

■

8.4.6. Análisis de sensibilidad

Para obtener las sensibilidades de β con respecto a $\mu_{F^+}, v_{F^+}, v_{N^*|F^+}$ y β_0 se consideran como variables artificiales y se incluyen las restricciones que fijan esas variables a sus valores dato. En otras palabras, se transforma el problema de optimización de la etapa 2 en:

$$\begin{aligned} & \text{Minimizar} && \beta = \sqrt{Z_{F^+}^2 + Z_{N^*}^2} && (8.202) \\ & Z_{F^+}, Z_{N^*}, \mu_{F^+}^+, \mu_{N^*}^+, v_{F^+}^+, v_{N^*|F^+}^+, \beta_0^+ \end{aligned}$$

sujeto a

$$\begin{aligned} Z_{F^+} &= \frac{F^+ - \mu_{F^+}^+}{v_{F^+} \mu_{F^+}^+} \\ Z_{N^*} &= \frac{N^* - \mu_{N^*}^+ - \beta_0^+ (F^+ - \mu_{F^+}^+)}{v_{N^*|F^+}^+ \mu_{N^*}^+} \\ F^+ &= h(N^*) \\ F \mu_{F^+} &= h(\mu_{N^*}^*) \\ F &> F^0 \\ \beta &> \beta^0 \\ \mu_{F^+}^+ &= \mu_{F^+} \\ v_{F^+}^+ &= v_{F^+} \\ v_{N^*|F^+}^+ &= v_{N^*|F^+} \\ \beta_0^+ &= \beta_0 \end{aligned} \quad (8.203)$$

Entonces, los valores de las variables duales correspondientes son las sensibilidades deseadas.

Las sensibilidades de F^* con respecto a N_0^* , pueden obtenerse directamente del problema dual (8.189)-(8.190), porque N_0^* aparece en la última restricción.

Los algoritmos precedentes se han implementado en el GAMS (véase Castillo et al. [29]), y usados para resolver el siguiente ejemplo.

Ejemplo computacional 8.7 (Método combinado). En este ejemplo se ilustra el método exacto y el aproximado. Para el exacto se usan los datos:

$$\begin{aligned} F^0 &= 2,2; \beta^0 = 2,0; \mu_{F^+} = \mu_{1/\psi} = 5,67; \\ v_{F^+} &= 0,1; v_{N^*|F^+} = 0,1; \beta_0 = 1. \end{aligned}$$

Resolviendo el problema (8.200)-(8.201) se obtiene:

$$F^+ = 4,562; N^* = 0,292; \beta = 2,04; F = 2,2; \mu_{N^*} = 1,487.$$

y las sensibilidades de la tabla 8.17.

Y para el método aproximado se asume

$$\begin{aligned} F^0 &= 1,2; \beta^0 = 2,0; \rho = 0,5; \mu_{F^+} = \mu_{1/\psi} = 5,67; \\ v_{F^+} &= 0,1; v_{N^*|F^+} = 0,1; \beta_0 = 1. \end{aligned}$$

Entonces, aplicando el algoritmo 8.2, se obtiene:

$$F^* = 12,34; \mu_{N^*} = 1,465; F^+ = 4,58; N^* = 0,294; \beta_{actual} = 2,0; F_{actual} = 2,18.$$

Cuadro 8.17: Sensibilidades del índice de fiabilidad con respecto a los parámetros del modelo.

$\frac{\partial \beta}{\partial F^0}$	$\frac{\partial \beta}{\partial \mu_{F^+}}$	$\frac{\partial \beta}{\partial v_{N^* F^+}}$	$\frac{\partial \beta}{\partial v_{F^+}}$	$\frac{\partial \beta}{\partial \beta_0}$
1,734	0,104	-1,675	-18,72	-2,136

Cuadro 8.18: Evolución del procedimiento iterativo.

Iteración	C. seguridad F	Clásico		Punto de diseño		β
		μ_{N^*}	μ_{F^*}	N^*	F^+	
1	1.200	0.594	6.806	0.411	5.491	0.320
2	2.040	1.335	11.568	0.310	4.707	1.761
3	2.159	1.448	12.246	0.296	4.599	1.969
4	2.175	1.463	12.334	0.295	4.585	1.996
5	2.177	1.465	12.345	0.294	4.584	1.999
6	2.177	1.465	12.347	0.294	4.583	2.000
7	2.177	1.465	12.347	0.294	4.583	2.000

Cuadro 8.19: Sensibilidades del índice de fiabilidad β con respecto a los parámetros estadísticos.

$\frac{\partial\beta}{\partial\mu_{N^*}}$	$\frac{\partial\beta}{\partial\mu_{F^+}}$	$\frac{\partial\beta}{\partial v_{N^* F^+}}$	$\frac{\partial\beta}{\partial v_{F^+}}$	$\frac{\partial\beta}{\partial\beta_0}$
1,82	-0,562	-1,6	-18,4	-2,1

El proceso se ilustra en la tabla 8.18, que muestra la rápida convergencia del método.

Nótese que la restricción asociada al coeficiente de seguridad $F > F^0 = 1,2$ no es activa, mientras que la restricción asociada al índice de fiabilidad $\beta > \beta^0 = 2$ es activa.

Finalmente, las sensibilidades del índice de fiabilidad β con respecto a los parámetros estadísticos μ_{N^*} , μ_{F^+} , $v_{N^*|F^+}$, v_{F^+} y β_0 se han calculado utilizando el método descrito en 8.4.4, y los resultados se muestran en la tabla 8.19, donde se observa que el índice de fiabilidad aumenta en 1,82 unidades por incremento unitario de μ_{N^*} , y disminuye $-0,562$, $-1,6$, $-18,4$ y $-2,1$, por incremento unitario de μ_{F^+} , $v_{N^*|F^+}$, v_{F^+} y β_0 , respectivamente. ■

Capítulo 9

Conclusiones y Futuras Líneas de Investigación

9.1. Resumen de Aportaciones

En esta sección se presenta un resumen de las contribuciones más importantes de esta tesis:

1. Se han presentado dos nuevos métodos de NIVEL III para el cálculo de probabilidades de fallo: uno basado en el cálculo del volumen de politopos, y otro mediante un método recursivo de integración de Gauss-Legendre.
 - a) El primero se basa en la transformación del conjunto inicial de variables al espacio n -dimensional uniformemente distribuido en el hipercubo de dimensión unidad, junto con región de fallo. De esta forma, la función de densidad conjunta de las variables que intervienen se reduce a la unidad, y el problema del cálculo de la probabilidad de fallo se transforma en el cálculo del hipervolumen de la región de fallo. Éste se obtiene particionando el dominio de fallo dentro del hipercubo en politopos, que a su vez se descomponen en símlices. El volumen final se obtiene como suma de los volúmenes de esos símlices.
 - b) El segundo también reduce el conjunto de variables y la ecuación de estado límite al espacio n -dimensional uniformemente distribuido en el hipercubo unitario, y calcula la probabilidad de fallo asociada mediante un procedimiento recursivo basado en las fórmulas de cuadratura de Gauss-Legendre.
2. Se ha mostrado la aplicabilidad práctica de las técnicas de optimización por descomposición en la resolución de problemas basados en fiabilidad. Que permiten la resolución de problemas que, por su complejidad y tamaño, no era posible resolver con los métodos existentes.
3. Se han desarrollado dos metodologías originales de descomposición para la resolución de problemas de gran aplicabilidad práctica en distintas ramas de la ingeniería, una (a) basada en un método de relajación y la otra (b) basada en una aproximación secuencial por hiperplanos.

4. Se ha presentado un método híbrido que permite un doble control de la seguridad mediante (a) coeficientes de seguridad globales y (b) probabilidades de fallo o índices de fiabilidad, y que proporciona un procedimiento sistemático y racional de diseño ingenieril. Este método emplea para su resolución el procedimiento de relajación iterativo comentado anteriormente. Consiste en la repetición secuencial de tres etapas: (a) un diseño clásico que minimiza la función objetivo teniendo en cuenta sólo los coeficientes de seguridad, (b) evaluación de las probabilidades de fallo o índices de fiabilidad asociados a cada modo de fallo y (c) ajuste de los coeficientes de seguridad para tener en cuenta las restricciones probabilistas. El método se repite hasta alcanzar la convergencia, es decir, hasta que se satisfagan todas las restricciones, tanto clásicas como modernas.
5. Se ha propuesto el método de aproximación por hiperplanos para la resolución del problema híbrido. En este caso el procedimiento iterativo consta de dos etapas: (a) diseño óptimo aproximado del problema global en el que se introducen las restricciones asociadas a las probabilidades de fallo o índices de fiabilidad mediante aproximaciones por hiperplanos, y (b) evaluación de las probabilidades de fallo o índices de fiabilidad asociados a cada modo de fallo y obtención de un nuevo hiperplano aproximante, de tal forma que cada vez se reproduce de forma más precisa la restricción de complicación. Esta metodología permite la utilización de coeficientes de seguridad parciales en las restricciones de seguridad, que proporciona una herramienta muy útil de calibración de códigos.
6. Se ha demostrado cómo se pueden emplear las técnicas de optimización por descomposición, en concreto la descomposición de Benders, para resolver problemas en los que las probabilidades de fallo son también variables a determinar (variables de complicación). Son de especial interés en problemas de optimización a largo plazo, en los que interviene la probabilidad de fallo en la función de coste, con lo que se pueden abordar problemas con costes de mantenimiento, reparación, etc.).
7. Se han presentado formalmente todos los tipos de problemas de optimización basados en fiabilidad que se pueden resolver mediante estas técnicas de descomposición. Incluyendo problemas basados en métodos clásicos, con coeficientes de seguridad global o parcial, métodos basados en probabilidades de fallo mediante FORM, con índices de fiabilidad o probabilidades de fallo, métodos híbridos que tienen un doble control de seguridad, clásico y probabilista, los métodos de largo plazo y, por último, el modelo general que incluye todas las alternativas, costes a largo plazo, restricciones de complicación probabilista y restricciones clásicas.
8. Se ha mostrado un método general de análisis de sensibilidad para todo tipo de problemas, y en especial para los problemas relativos a fiabilidad que permite de forma sencilla y automática efectuar un estudio completo de sensibilidad en la solución óptima del problema. Esta contribución es de gran interés, tanto para el proyectista como para los constructores, ya que proporciona información de cómo varía el coste con respecto a todos los datos del problema, coeficientes de seguridad impuestos, restricciones de seguridad asociadas a probabilidades de fallo o índices de fiabilidad, con las

ventajas que ello conlleva. Y además, permite conocer la influencia de las variables e hipótesis estadísticas (medias, desviaciones típicas, ...) en cada uno de los modos de fallo, con lo que se conoce la influencia cuantitativa y cualitativa de las variables o parámetros en la fiabilidad del sistema.

9. Se han desarrollado multitud de ejemplos prácticos con problemas procedentes de distintas disciplinas de la ingeniería civil:
 - a) Diseño de muros de contención para soportar los empujes del terreno en taludes inestables, o situaciones en las que se precise un cambio brusco de nivel (terraplenes de carreteras, etc.).
 - b) Diseño de estructuras mixtas, como puentes o vigas.
 - c) Diques de escollera sometidos a la acción del oleaje, y por extensión, aplicación a otro tipo de obras marítimas como diques verticales, diques rebasables, espigones, etc.
 - d) Diseño de puentes grúa para manipulación de cargas pesadas en la industria.
 - e) Cálculo de estabilidad de taludes.
10. Respecto al cálculo de estabilidad de taludes se ha presentado un nuevo método que combina cálculo de variaciones, determinación de la fiabilidad y análisis de sensibilidad de los parámetros que intervienen. Primeramente, se aplica el cálculo de variaciones para determinar la línea de deslizamiento pésima utilizando una discretización que transforma el problema inicial en uno de optimización, mucho más eficiente que el método clásico de Monte Carlo empleado en la actualidad. Entonces, se pueden aplicar las estrategias propuestas en los apartados anteriores: (a) tratamiento clásico, (b) probabilista o moderno y (c) el modelo híbrido.

9.2. Conclusiones

Tras una revisión exhaustiva del material expuesto durante toda la tesis se puede llegar a las siguientes conclusiones:

1. La respuesta al dilema de si utilizar el método 'clásico' basado en coeficientes de seguridad o el método 'moderno' basado en conceptos probabilistas no ha de ser determinante, en el sentido de que dado que son dos medidas distintas de la seguridad de una estructura, por qué no emplear el método híbrido que permite un calibrado específico para cada diseño concreto, con las ventajas que eso supone para ambos.
2. El método combinado (PFSM) proporciona una metodología racional y sistemática para el diseño de multitud de problemas ingenieriles. El ingeniero es capaz de obtener un diseño automático en el que se obtienen los coeficientes de seguridad y las probabilidades de fallo de cada uno de los modos de fallo con un doble control de la seguridad. Así, prevalecerá siempre la condición más restrictiva. Tiene la ventaja de que el diseñador sólo ha de preocuparse de imponer las restricciones del problema, sin perjuicio, de que se anule la capacidad creativa y estética de los diseños. Muchas son

las variables de diseño con las que se puede trabajar y no han de ser necesariamente las dimensiones o disposiciones formales de los elementos que constituyan la obra.

3. Los métodos de optimización por descomposición permiten también, resolver problemas en los que la probabilidad de fallo es una de las incógnitas, es decir, que se pueden abordar problemas de minimización de coste a largo plazo en los que se incluye el coste asociado a la probabilidad de fallo, costes de reparación, mantenimiento, etc. De esta forma el establecimiento de las probabilidades de fallo óptimas que se suponen calculadas en los códigos, se obtendrían de forma automática en función del tipo de obra con la que se trabaje. El empleo de límites de probabilidades de fallo iguales para obras dispares es muy discutible.
4. Independientemente del empleo del método híbrido que combina coeficientes de seguridad y probabilidades de fallo, o del método que incluye la probabilidad de fallo en la función de coste, las técnicas de descomposición han demostrado ser una herramienta útil y potente para la resolución de problemas con restricciones de fiabilidad, que requerían complicados algoritmos anidados para poder tener en cuenta la probabilidad de fallo en el procedimiento de optimización. Todas ellas tienen en común las siguientes ventajas adicionales:
 - a) El análisis de la fiabilidad aprovecha todas las ventajas de los paquetes de optimización estándar, ampliamente contrastados en otras aplicaciones.
 - b) No es necesario invertir la transformación de Rosenblatt para poder aplicar el método FORM, ya que los paquetes de optimización permiten la introducción de las restricciones en cualquier formato.
 - c) Las restricciones pueden escribirse de cualquier forma, implícita o explícita.
 - d) La región de fallo no ha de definirse en términos de las variables normales estándar independientes, se pueden añadir tantas restricciones o variables auxiliares como se quiera para simplificar el modelo. Esto facilita el trabajo al ingeniero que tiene que definir las restricciones como al software de optimización, que tiene menos dificultades en resolverlo, ya que se simplifica el cálculo de derivadas.
 - e) La responsabilidad de resolver los métodos iterativos propuestos recae en el software de optimización.
 - f) Se establece un doble control de la seguridad para cada modo de fallo: (a) mediante coeficientes de seguridad y (b) mediante probabilidades de fallo. Esto permite un diálogo entre los dos tipos de ingenieros (clásico y probabilista) y proporciona una herramienta muy útil para detectar errores en ambas metodologías, tanto hipótesis estadísticas no razonables, como coeficientes obsoletos.
 - g) Son una herramienta muy útil para la calibración de códigos, ya que el doble control de la seguridad, permite establecer para cada diseño la relación entre los coeficientes de seguridad y las probabilidades de fallo de cada modo.
 - h) Los diseños resultantes son (a) automáticos, es decir, que los valores de las variables de diseño son proporcionadas por el procedimiento de optimización, no por el ingeniero, (b) óptimos, en el sentido de que resultan de optimizar una

función objetivo y (c) independientes del diseñador, es decir, si las restricciones impuestas son las mismas, el diseño final no cambiará.

5. El empleo de paquetes de optimización o rutinas implementadas por especialistas en optimización, permite abordar problemas grandes con un gran número de restricciones y variables mediante herramientas bien consolidadas en otras aplicaciones.
6. El método general de análisis de sensibilidad mediante las variables duales es especialmente útil para el diseñador y para el constructor, ya que permite tener una idea clara de qué variables son importantes tanto en el coste o función objetivo, como en la seguridad frente a cada modo de fallo considerado y en qué cuantía. Presenta las siguientes ventajas:
 - a) Dado que todos los paquetes de optimización calculan la solución del problema dual sin coste adicional es muy sencillo obtener las sensibilidades de los parámetros sin más que transformarlos en variables artificiales, las variables duales asociadas a las restricciones que fijan los valores de esas variables a los valores de los parámetros proporcionan la sensibilidad buscada.
 - b) Como el estudio de sensibilidad se aborda en el punto óptimo, el incremento de variables de los modelos no repercute en el cálculo de la sensibilidad.
 - c) Se obtienen todas las sensibilidades posibles respecto de la función objetivo del problema original.
 - d) Se obtienen todas las sensibilidades de los parámetros e hipótesis estadísticas (medias, desviaciones típicas, coeficientes de correlación, etc.) respecto a la fiabilidad frente a todos los modos de fallo, con lo que se tiene un conocimiento exhaustivo del comportamiento de la estructura en cuanto a su fiabilidad.
7. La metodología presentada para el cálculo de estabilidad de taludes presenta una serie de ventajas adicionales:
 - a) El tratamiento adimensional y el planteamiento funcional permiten establecer los parámetros de los que realmente depende el problema. Además permite resolver un conjunto infinito de problemas a la vez.
 - b) El cálculo de variaciones permite resolver el problema de forma clásica, moderna y combinada, y asocia a cada conjunto de parámetros del suelo una línea de deslizamiento pésima. Así, no se considera una línea determinada sino todo el sistema de superficies potenciales de deslizamiento.
 - c) La aproximación moderna sólo requiere la función de densidad conjunta de dos variables aleatorias adimensionales. Esto simplifica de forma considerable el problema.
 - d) La metodología podría aplicarse a terrenos con cualquier perfil de talud, terrenos multicapa, e incluso hacerse extensible a problemas de cimentaciones u otros similares, etc

El estudio presentado puede sentar las bases para desarrollar metodologías más potentes que tengan en cuenta la variabilidad espacial de los parámetros del terreno mediante funciones de autocorrelación, como en los estudios desarrollados por Alonso [5] y Li y Lumb [107].

9.3. Futuras Líneas de Investigación

Respecto a las futuras líneas de investigación es indudable, pese a que el avance ha sido grande, que quedan muchas cosas por hacer, pero desde la certeza de que los métodos de optimización propuestos son el camino adecuado. Algunas de las propuestas son:

1. Todo el trabajo expuesto se ha limitado a fiabilidad temporalmente invariante, pero el problema real es aún más complicado, dado que muchos de los parámetros que intervienen en el diseño son variables aleatorias que evolucionan con el tiempo, y se han de determinar métodos que permitan tener en cuenta su influencia en la fiabilidad, y por consiguiente, en la optimización a largo plazo.
2. Las probabilidades de fallo empleadas son aproximaciones FOSM y FORM, para incluir aproximaciones de la región de fallo de segundo orden se podrían emplear métodos SORM lo que sería una mejora. Éstos requieren el cálculo de las curvaturas o derivadas segundas de las ecuaciones de estado límite en el punto de diseño o máxima verosimilitud, sin embargo, al emplearse algoritmos de optimización estándar, que ya requieren el cálculo de las derivadas segundas para obtener el hessiano, éstas podrían determinarse sin excesiva complicación. Más dificultosa sería la obtención de las derivadas de los índices de fiabilidad con respecto a las variables de complicación o de diseño, necesarias para que el procedimiento de optimización global converga.
3. Otro aspecto en el que hay que ahondar es en la aplicación de las técnicas de optimización considerando las obras como sistemas, es decir, no sólo tener en cuenta modos independientes de fallo con su probabilidad asociada, como se ha hecho en este trabajo, sino también considerar la correlación entre modos de fallo para poder llegar a calcular la probabilidad de fallo del sistema global. Existen en la literatura muchos trabajos relacionados con estos aspectos, que tratan la probabilidad de sistemas tanto en serie, como en paralelo, e incluso combinaciones, que es lo que realmente se tiene en la realidad de cada día. La mayoría tratan este complejo problema mediante métodos de primer orden, que serían una continuación de los métodos FORM, precisamente éstos son los métodos se pueden tratar el problema de forma fiable mediante las técnicas de optimización por descomposición, y que serán objeto de investigación futura.
4. Otra de las aplicaciones en las que estas metodologías tienen mayor futuro es en la elaboración de cógigos clásicos basados en técnicas probabilistas, es decir en la calibración de códigos. Procedimiento laborioso que requiere la consideración de múltiples y variadas situaciones de proyecto que se pueden abordar de forma descompuesta para, enlazarlas después con los métodos propuestos.

5. Respecto a las aplicaciones a problemas concretos, uno de los aspectos a mejorar en el futuro es la mejora del cálculo de la fiabilidad en estabilidad de taludes. Partiendo del trabajo presentado en esta tesis, y añadiendo las contribuciones de Alonso, Li y Lumb se podría tratar de resolver el problema considerando el terreno como un proceso espacial con una dependencia correlacionada en función de su distancia. Es decir, cuanto más cercanos estén, mayor correlación tendrán. Posteriormente, mediante técnicas de fiabilidad de sistemas en serie se puede determinar la fiabilidad de todas las superficies potencialmente deslizantes.
6. También se podrían tratar de abordar problemas de elementos finitos combinados con probabilidad de fallo, ya tratados con éxito por otros investigadores pero en modelos reducidos sin aplicabilidad práctica. Las técnicas de descomposición parecen una herramienta adecuada para este tipo de problemas.

Apéndice A

Códigos GAMS

En el presente apéndice se presentan y explican las implementaciones en GAMS de las aplicaciones tratadas en los capítulos anteriores. El capítulo está estructurado de la siguiente manera: en la sección A.1 se trata el método de relajación, en la sección A.2 se presenta la implementación de la aproximación por hiperplanos, en la sección A.3 se muestra la descomposición de Benders, en la A.4 se muestra de nuevo el método de relajación pero aplicado al ejemplo del muro, en la sección A.5 se trata la implementación del muro resuelta mediante la aproximación por hiperplanos, y por último en A.6 se trata el análisis de sensibilidad.

Las explicaciones del código irán con un asterisco (*) al comienzo de cada línea, es la forma de poner comentarios en el GAMS. O bien, cuando los comentarios ocupan varias líneas de la forma:

```
$OnText
Comentarios ...
...
...
...
$OffText
```

A.1. Código GAMS del Método de Relajación

En esta sección se presenta la implementación del método de relajación para resolver problemas de fiabilidad basándose en el método combinado (PSFM). Está aplicado para la resolución del ejemplo computacional 6.1:

```
$Title Metodo de relajacion aplicada al PFSM
* Inicializo el fichero de escritura de resultados
file out1 /relaja.out/;
```

```
SETS
  X variables x /mu_x1,mu_x2/
  A parametros y /mu_y1,mu_y2/
  B parametros v /v_x_1,v_x_2,v_y_1,v_y_2/
```

```

M restricciones h /first,second/
IT numero maximo de iteraciones /1*20/;

ALIAS(M,Maux);

SCALARS
  epsilon maxima tolerancia permitida /1e-5/
  error parametro de almacenamiento del error /1/
  iteration contados de iteraciones /0/
  rho coeficiente de relajacion /0.2/;

PARAMETERS
  Srho(M) multiplicador de lagrange asociado a gi para la actualizacion automatica
  Flo(M) limites inferiores de las restricciones g1 y g2/
    first      1.2
    second     1.6
  /
  Fr(M) valores reales de las restricciones g1 y g2
  Fpar(M) valores actuales de los limites inferiores de las restricciones g1 y g2
  betalo(M) limites inferiores de las restricciones h1 y h2/
  first        3
  second       4
  /
  betaa(M) valores reales de las restricciones h1 y h2
  betaux(M) valores auxiliares para el calculo del error
  DataX(X) valores iniciales de las variables x/
    mu_x1     5
    mu_x2     5
  /
  DataA(A) valores de los parametros y/
    mu_y1     1
    mu_y2     1
  /
  DataB(B) valores de los parametros v/
    v_x_1     0.02
    v_x_2     0.02
    v_y_1     0.1
    v_y_2     0.1
  /
  errores(IT) parametro del almacenamiento del error en cada iteracion;

VARIABLES
  zc variable objetivo de cada uno de los modelos
  VarX(X) variables de diseno x
  VarU(X) variables u asociadas a las x
  VarV(A) variables v asociadas a las y
  Z(B) variables auxiliares z;

EQUATIONS
* Ecuaciones del modelo para resolucion del problema maestro (clasico)
  ZClassic, firste, seconde

```

```

* Ecuaciones para la resolucio de los subproblemas
  Zbeta, ZUdef, ZVdef, Ffirst, Fsecond;

* Ecuaciones del modelo para resolucio del problema maestro (clasico)
  ZClassic..zc=e=sqr(VarX('mu_x1')/DataA('mu_y1'))+sqr(VarX('mu_x2')/DataA('mu_y2'));
  firste..VarX('mu_x1')*VarX('mu_x2')=g=DataA('mu_y1')*DataA('mu_y2')*Fpar('first');
  seconde..sqrt(DataA('mu_y1')*VarX('mu_x2'))=g=DataA('mu_y2')*sqrt(VarX('mu_x1'))...
  ...*Fpar('second');

* Ecuaciones para la resolucio de los subproblemas
  Zbeta..zc=e=sqrt(sum(B,sqr(Z(B))));
  ZUdef(X,B)$ (ORD(B)=ORD(X))..Z(B)=e=(VarU(X)-DataX(X))/(DataB(B)*DataX(X));
  ZVdef(A,B)$ (ORD(A)+CARD(X)=ORD(B))..Z(B)=e=(VarV(A)-DataA(A))/(DataB(B)*DataA(A));
  Ffirst..VarU('mu_x1')*VarU('mu_x2')=e=VarV('mu_y1')*VarV('mu_y2');
  Fsecond..sqrt(VarV('mu_y1')*VarU('mu_x2'))=e=VarV('mu_y2')*sqrt(VarU('mu_x1'));

* Planteamiento de los modelos clasico y subproblemas
  MODEL classic /ZClassic,firste,seconde/;
  MODEL mfirst/Zbeta,ZUdef,ZVdef,Ffirst/;
  MODEL msecond/Zbeta,ZUdef,ZVdef,Fsecond/;

* Inicializacion de los limites inferiores de las restricciones g1 y g2
* a los valores iniciales
  Fpar(M)=Flo(M);
  betaa(M)=betalo(M);

* Comienzo del procedimiento iterativo
loop(IT$(error>epsilon),
  iteration=iteration+1;
* Escritura del numero de iteraciones
  put out1;
  put "  ITERATION ",iteration:5//;
  put "----- CLASSICAL -----"/;
* Almacenamiento de los valores de h1 y h2 para controlar el error
  betaux(M)=betaa(M);
* Valores iniciales de las variables x
  VarX.l(X)=DataX(X);
* Resolucion del model clasico
  SOLVE classic USING nlp MINIMIZING zc;
* Escritura de resultados
  put "cost=",zc.l:8:3, " modelstat= ",classic.modelstat,",...
  ... solvestat= ",classic.solvestat/;
  put " cpu=",classic.resusd:9:5//;
  put "Los valores medios son A=",VarX.l('mu_x1'):8:3,", y B=",VarX.l('mu_x2'):8:3/;
  put "Actual safety factors"/;
* Calculo del valor actual de las restricciones g1 y g2
  Fr('first')=(VarX.l('mu_x1')*VarX.l('mu_x2'))/(DataA('mu_y1')*DataA('mu_y2'));
  Fr('second')=sqrt(DataA('mu_y1')*VarX.l('mu_x2'))/...
  ... (DataA('mu_y2')*sqrt(VarX.l('mu_x1')));
* Escritura de los valores actuales
  put "Fr('first')=", Fr('first'):8:3," Fr('second')=", Fr('second'):8:3/;

```

```

* Almacenamiento en el parametro asociado de los valores optimos de x
  DataX(X)=VarX.l(X);
* Resolucion de los subproblemas
  loop(M,
* Valores iniciales de las variables u y v
    VarU.l(X)=DataX(X);
    VarV.l(A)=DataA(A);
    if(ORD(M) eq 1,
* Resolucion del subproblema asociado a h1
      SOLVE mfirst USING nlp MINIMIZING zc;
* Escritura de resultados
      put "beta=",zc.l:8:3, " modelstat= ",mfirst.modelstat,",...
      ... solvestat= ",mfirst.solvestat/;
      put " cpu=",mfirst.resusd:9:5//;
* Almacenamiento de la variable dual asociada a la restriccion g1
      Srho(M)=Ffirst.m;
    else
* Resolucion del subproblema asociado a h2
      SOLVE msecond USING nlp MINIMIZING zc;
* Escritura de resultados
      put "betas=",zc.l:8:3, " modelstat= ",msecond.modelstat,",...
      ... solvestat= ",msecond.solvestat/;
      put " cpu=",msecond.resusd:8:3//;
* Almacenamiento de la variable dual asociada a la restriccion g2
      Srho(M)=Fsecond.m;
    );
* Almacenamiento de los valores optimos de h1 y h2
  betaa(M)=zc.l;
);
* Escritura de valores intermedios
  loop(M,
    put "beta('",M.tl,"')=",betaa(M):6:3, " Fpar('",M.tl,"')=",Fpar(M):6:3,...
    ... " Fr('",M.tl:5,"')=",Fr(M):8:3/;
  );
* Actualizacion de los limites inferiores de g1 y g2
* con el coeficiente de relajacion
* Fpar(M)=Fpar(M)+rho*(betalo(M)-betaa(M));
* Actualizacion de los limites inferiores de g1 y g2 con el metodo dual
  Fpar(M)=Fpar(M)-(betalo(M)-betaa(M))/Srho(M);
* Comprobacion de que los nuevos limites no son inferiores a los requeridos
  loop(M,
    if(Fpar(M)<Flo(M),Fpar(M)=Flo(M)););
  );
* Calculo del error
  error=0.0;
  loop(M,
    if((abs(betaa(M)-betaux(M))/betaa(M))>error and betaa(M)>0,
      error=(abs(betaa(M)-betaux(M))/betaa(M));
    );
  );
* Almacenamiento del error

```

```

    errores(IT)=error;
* Escritura
    put "error(",iteration:5,")= ",error:14:12/;

    put "-----"//;
);
* Fin del procedimiento iterativo

```

A.2. Codigo GAMS del Método de Aproximación por Hiperplanos

En esta subsección se presenta la implementación del método de aproximación por hiperplanos para resolver problemas de fiabilidad basándose en el método combinado (PSFM). Está aplicado para la resolución del ejemplo computacional 6.1:

```

$title Metodo de relajacion aplicada al PFSM
* Inicializo el fichero de escritura de resultados
file out1 /hiper.out/;

SETS
    X variables x /mu_x1,mu_x2/
    A parametros y /mu_y1,mu_y2/
    B parametros v /v_x_1,v_x_2,v_y_1,v_y_2/
    M restricciones h /first,second/
    IT numero maximo de iteraciones /1*20/
    ITER(IT) conjunto dinamico para controlar los hiperplanos
    FIRST(M) conjunto dinamico para la primera iteracion;

* Desactivacion de los hiperplanos
ITER(IT)=no;
FIRST(M)=no;
ALIAS(M,Maux);

SCALARS
    epsilon maxima tolerancia permitida /1e-5/
    error parametro de almacenamiento del error /1/
    iteration contados de iteraciones /0/;

PARAMETERS
    Flo(M) limites inferiores de las restricciones g1 y g2/
        first          1.2
        second         1.6
    /
    Fr(M) valores reales de las restricciones g1 y g2
    betalo(M) limites inferiores de las restricciones h1 y h2/
    first             3
    second            4
    /
    betaa(M) valores reales de las restricciones h1 y h2

```

```

betaux(M) valores auxiliares para el calculo del error
DataX(X) valores iniciales de las variables x/
    mu_x1    5
    mu_x2    5
/
DataA(A) valores de los parametros y/
    mu_y1    1
    mu_y2    1
/
DataB(B) valores de los parametros v/
    v_x_1    0.02
    v_x_2    0.02
    v_y_1    0.1
    v_y_2    0.1
/
errores(IT) parametro del almacenamiento del error en cada iteracion
lambdaK(IT,M,X) pendientes de los hiperplanos aproximantes
XesK(IT,X) valores optimos de las variables x
betaK(IT,M) valores de las restricciones h para cada valor de x;

VARIABLES
    zc variable objetivo de cada uno de los modelos
    VarX(X) variables de diseno x
    VarU(X) variables u asociadas a las x
    VarV(A) variables v asociadas a las y
    Z(B) variables auxiliares z
    beta(M) valores actuales de las restricciones h1 y h2;

EQUATIONS
* Ecuaciones del modelo para resolucio del problema maestro (clasico)
    ZClassic, firste, seconde, betadef, auxbeta
* Ecuaciones para la resolucio de los subproblemas
    Zbeta, ZUdef, ZVdef, Ffirst, Fsecond, fixedX;

* Ecuaciones del modelo para resolucio del problema maestro (clasico)
    ZClassic..zc=e=sqr(VarX('mu_x1')/DataA('mu_y1'))+sqr(VarX('mu_x2')/DataA('mu_y2'));
    firste..VarX('mu_x1')*VarX('mu_x2')=g=DataA('mu_y1')*DataA('mu_y2')*Flo('first');
    seconde..sqrt(DataA('mu_y1'))*VarX('mu_x2')=g=DataA('mu_y2')*sqrt(VarX('mu_x1'))*...
        ...Flo('second');
    betadef(ITER,M)$(FIRST(M))..beta(M)=l=betaK(ITER,M)+...
        ...sum(X,lambdaK(ITER,M,X)*(VarX(X)-XesK(ITER,X)));
    auxbeta(M)$(FIRST(M))..beta(M)=g=betaK(ITER,M);

* Ecuaciones para la resolucio de los subproblemas
    Zbeta..zc=e=sqrt(sum(B,sqr(Z(B))));
    ZUdef(X,B)$(ORD(X)=ORD(B))..Z(B)=e=(VarU(X)-VarX(X))/(DataB(B)*VarX(X));
    ZVdef(A,B)$(ORD(A)+CARD(X)=ORD(B))..Z(B)=e=(VarV(A)-DataA(A))/(DataB(B)*DataA(A));
    Ffirst..VarU('mu_x1')*VarU('mu_x2')=e=VarV('mu_y1')*VarV('mu_y2');
    Fsecond..sqrt(VarV('mu_y1'))*VarU('mu_x2')=e=VarV('mu_y2')*sqrt(VarU('mu_x1'));
    fixedX(X)..VarX(X)=e=DataX(X);

```

```

* Planteamiento de los modelos clasico y subproblemas
  MODEL classic /ZClassic,firste,seconde,betadef,auxbeta/;
  MODEL mfirst /Zbeta,ZUdef,ZVdef,Ffirst,fixedX/;
  MODEL msecond /Zbeta,ZUdef,ZVdef,Fsecond,fixedX/;

* Inicializacion de los limites inferiores de las restricciones g1 y g2
* a los valores iniciales
  betaa(M)=betalo(M);
  lambdaK(IT,M,X)=0.0;
  XesK(IT,X)=0.0;
  betaK(IT,M)=0.0;

* Comienzo del procedimiento iterativo
loop(IT$(error>epsilon),
  iteration=iteration+1;
* Escritura del numero de iteraciones
  put out1;
  put "  ITERATION ",iteration:5//;
  put "----- CLASSICAL -----"/;
* Almacenamiento de los valores de h1 y h2 para controlar el error
  betaux(M)=betaa(M);
* Valores iniciales de las variables x
  VarX.l(X)=DataX(X);
* Resolucion del model clasico
  SOLVE classic USING nlp MINIMIZING zc;
* Escritura de resultados
  put "cost=",zc.l:8:3, " modelstat= ",classic.modelstat,",...
  ...solvestat= ",classic.solvestat/;
  put " cpu=",classic.resusd:9:5//;
  put "Los valores medios son A=",VarX.l('mu_x1'):8:3,",y B=",VarX.l('mu_x2'):8:3/;
  put "Actual safety factors"/;
* Calculo del valor actual de las restricciones g1 y g2
  Fr('first')=(VarX.l('mu_x1')*VarX.l('mu_x2'))/(DataA('mu_y1')*DataA('mu_y2'));
  Fr('second')=sqrt(DataA('mu_y1')*VarX.l('mu_x2')/...
  ... (DataA('mu_y2')*sqrt(VarX.l('mu_x1'))));
* Escritura de los valores actuales
  put "Fr('first')=", Fr('first'):8:3," Fr('second')=", Fr('second'):8:3/;
* Almacenamiento en el parametro asociado de los valores optimos de x
  DataX(X)=VarX.l(X);
  XesK(IT,X)=DataX(X);
* Resolucion de los subproblemas
  loop(M,
* Valores iniciales de las variables u y v
  VarU.l(X)=DataX(X);
  VarV.l(A)=DataA(A);
  if(ORD(M) eq 1,
* Resolucion del subproblema asociado a h1
  SOLVE mfirst USING nlp MINIMIZING zc;
* Escritura de resultados
  put "beta=",zc.l:8:3, " modelstat= ",mfirst.modelstat,",...
  ... solvestat= ",mfirst.solvestat/;

```

```

        put " cpu=",mfirst.resusd:9:5//;
    else
* Resolucion del subproblema asociado a h2
        SOLVE msecond USING nlp MINIMIZING zc;
* Escritura de resultados
        put "betas=",zc.l:8:3, " modelstat= ",msecond.modelstat,",...
        ... solvestat= ",msecond.solvestat/;
        put " cpu=",msecond.resusd:8:3//;
    );
* Almacenamiento de los valores optimos de h1 y h2
        betaa(M)=zc.l;
        lambdaK(IT,M,X)=fixedX.m(X);
        betaK(IT,M)=zc.l;
    );
* Escritura de valores intermedios
    loop(M,
        put "beta('",M.tl,"')=",betaa(M):6:3," Fr('",M.tl:5,"')=",Fr(M):8:3/;
    );
* Calculo del error
        error=0.0;
        loop(M,
            if((abs(betaa(M)-betaux(M))/betaa(M))>error and betaa(M)>0,
                error=(abs(betaa(M)-betaux(M))/betaa(M));
            );
        );
        FIRST(M)=yes;
        ITER(IT)=yes;
* Almacenamiento del error
        errores(IT)=error;
* Escritura
        put "error(",iteration:5,")= ",error:14:12/;

        put "-----"//;
    );
* Fin del procedimiento iterativo

```

A.3. Código GAMS de la Descomposición de Benders

A continuación se describe el código GAMS en el que se implementa la resolución del problema del dique de escollera mediante la descomposición de Benders.

```
$title Ejemplo del dique de escollera
```

```

* Inicialización del fichero de salida de resultados
file out /rebasebenders.out/;
put out;

```

```
SETS
```

```
  I variables aleatorias/1*2/
```

```
  IT numero maximo de iteraciones del metodo de Benders /1*20/
```

ITER(IT) conjunto dinamico para controlar los cortes de Benders;

* Desactivacion de todos los hiperplanos aproximantes
ITER(IT)=no;

SCALARS

pi /3.1415926535898/
gra gravedad terrestre/9.81/
error valor inicial del error/1/
Csup cota superior del coste total optimo
Cinf cota inferior del coste total optimo /5000/
Toler tolerancia admisible /1e-3/;

SCALARS

* Parametros

Dwl nivel del mar de diseno (m) /20/
Au parametro experimental /1.05/
Bu parametro experimental /-0.67/
cc coste del hormigon (euro) /60/
ca coste de la escollera (euro) /2.4/

* Random model parameters, sea state descriptors

Hs altura de ola significativa (m) /5/
Tz periodo medio (s) /10/
dst duracion del estado de mar (s) /3600/

* Auxiliary scalars

pf probabilidad de fallo de una ola
pfD probabilidad de fallo en la vida util;

PARAMETERS

Ctotal(IT) coste total para cada iteracion
ValorFc(IT) francobordos de cada iteracion
LambdaFc(IT) derivadas parciales del coste total...
...con respecto al francobordo en cada iteracion
ValorTan(IT) pendientes del talud de cada iteracion
LambdaTan(IT) derivadas parciales del coste total...
...con respecto a la pendiente del talud en cada iteracion;

VARIABLES

cd coste de construccion
ci coste de seguro
beta indice de fiabilidad
alfacost variable auxiliar para el problema maestro
z(I) variables normales estandar;

POSITIVE VARIABLES

* Variables aleatorias

H altura de ola, T periodo de la ola

* Variables de diseño, variables de complicacion

```

tan pendiente del talud, Fc francobordo
auxtan variables auxiliar asociada a la pendiente...
...del talud para el problema maestro
auxFc variables auxiliar asociada al francobordo...
...para el problema maestro

* Variables auxiliares
Ir numero de Iribarren, L longitud de onda, Ru run up, d altura del espaldon
vc volumen de hormigon, va volumen de escollera;

* Limites de las variables,
* muy importante para conseguir la convergencia
auxtan.lo=1/5; auxtan.up=1/2; L.lo=10; H.up=2.2*Hs; T.up=2.2*Tz;

EQUATIONS
* Optimizacion global
cddf definicion del coste de construccion
ddf definicion de la altura del espaldon
vcdf definicion del volumen de hormigon
vadf definicion del volumen de escollera

* Optimizacion asociada a la fiabilidad
betadef definicion del indice de fiabilidad
Zdef1 transformacion de Rosenblatt para la variable H
Zdef2 transformacion de Rosenblatt para la variable T
Iridf definicion del numero de Iribarren
Ldf ecuacion de la dispersion
rudf definicion del run up
verdf ecuacion de estado limite asociado al rebase

* Problema maestro
Restric(IT) cortes de Benders
auxmaster cota inferior del coste optimo;

* Optimizacion global
cddf..cd=e=cc*vc+ca*va;
ddf..Fc=e=2+d;
vcdf..vc=e=10*d;
vadf..va=e=0.5*(Dwl+2)*(Dwl+4+(Dwl+2)/tan);

* Optimizacion asociada a la fiabilidad
betadef..beta=e=sqrt(sum(I,sqr(z(I))));
Zdef1..errorf(z('1'))=e=1-exp(-2*sqr(H/Hs));
Zdef2..errorf(z('2'))=e=1-exp(-0.675*power((T/Tz),4));
Iridf..Ir*sqr(H/L)=e=tan;
Ldf..2*pi*L*(exp(2*pi*Dwl/L)+exp(-2*pi*Dwl/L))=e=...
...T*T*gra*(exp(2*pi*Dwl/L)-exp(-2*pi*Dwl/L));
rudf..Ru=e=H*Au*(1-exp(Bu*Ir));
verdf..Fc=e=Ru;

* Problema maestro

```

```

Restric(ITER)..alfacost=g=Ctotal(ITER)+...
...LambdaFc(ITER)*(auxFc-ValorFc(ITER))+...
...LambdaTan(ITER)*(auxtan-ValorTan(ITER));
auxmaster..alfacost=g=5000;

MODEL sublevel/betadef,Zdef1,Zdef2,Iridf,Ldf,rudf,verdf/;
MODEL cdirect/cddf,ddf,vcdf,vadf/;
MODEL Master/Restric,auxmaster/;

* Valores iniciales de los parametros
  Ctotal(IT)=0.0; LambdaFc(IT)=0.0; ValorFc(IT)=0.0;
  LambdaTan(IT)=0.0; ValorTan(IT)=0.0;

* Valores iniciales de las variables de complicacion
Fc.fx=7; tan.fx=1/3;

* Comienzo del procedimiento iterativo
loop(IT$(error gt TOLER),

* Escritura del numero de iteracion
put "      Iteration= ",ord(IT):12:8//;

  if(ORD(IT)>1,

* Resolucion del problema maestro para obtener los nuevos valores
* de las variables de complicacion
  SOLVE Master USING lp MINIMIZING alfacost;

* Escritura de resultados
  put "alfacost= ",alfacost.l:12:4,", modelstat= ",...
  ..Master.modelstat,", solvestat= ",Master.solvestat/;

* Actualización de los nuevos valores de las variables de complicacion
  Fc.fx=auxFc.l; tan.fx=auxtan.l;

* Actualizacion del limite inferior del coste para la iteracion IT
  Cinf=alfacost.l;
);

* Almacenamiento de las variables de complicacion para los cortes...
...de Benders
  ValorFc(IT)=Fc.l; ValorTan(IT)=tan.l;

* Activacion del corte de Benders para el siguiente problema maestro
  ITER(IT)=yes;

* Escritura
  put "Complicating variables: Fc=",Fc.l:6:3,", tan=",tan.l:6:3/;

* Valores iniciales para la resolucion del problema de fiabilidad...
*muy importante para la convergencia del modelo

```

```

H.l=1.5*Hs; T.l=1.1*Tz; L.l=136.931; Ir.l=tan.l/sqrt(H.l/L.l);
Ru.l=H.l*Au*(1-exp(Bu*Ir.l)); z.l('1')=2.28; z.l('2')=0.32;
beta.l=sqrt(sum(I,sqr(z.l(I))));

* Resolucion subproblema asociado a la fiabilidad para los nuevos valores fijos...
* de las variables de complicacion
SOLVE sublevel USING nlp MINIMIZING beta;

* Escritura
put "pf= ",(errorf(-beta.l)):12:8," , modelstat= ",...
...sublevel.modelstat," , solvestat= ",sublevel.solvestat/;

* Calculo de las probabilidades de fallo
pf=errorf(-beta.l); pfD=1-(1-pf)**(dst/Tz);

* Derivadas parciales de pfD con respecto a las variables de complicacion
LambdaFc(IT)=-dst*(1-pf)**(dst/Tz-1)*exp(-beta.l*beta.l/2)*...
...(Fc.m)/(Tz*sqrt(2*pi));
LambdaTan(IT)=-dst*(1-pf)**(dst/Tz-1)*exp(-beta.l*beta.l/2)*...
...(tan.m)/(Tz*sqrt(2*pi));

* Coste del seguro en funcion de pfD
ci.l=5000+125000000*pfD**2;

* Escritura
put "pfD= ",pfD:12:8/;
put "insurance cost= ",(ci.l):12:4/;
put "LambdaFc1(",ord(IT):2," )=",LambdaFc(IT):12:4,...
..."LambdaTn1(",ord(IT):2," )=",LambdaTan(IT):12:4/;

* Sumo al coste total el coste del seguro
Ctotal(IT)=ci.l;

* Derivadas parciales del coste del seguro con respecto a las
* variables de complicacion
LambdaFc(IT)=LambdaFc(IT)*(2*125000000*pfD);
LambdaTan(IT)=LambdaTan(IT)*(2*125000000*pfD);

* Escritura
put "LambdaFc2(",ord(IT):2," )=",LambdaFc(IT):12:4,...
..."LambdaTn2(",ord(IT):2," )=",LambdaTan(IT):12:4/;

* Resolucion del modelo auxiliar para calcular las derivadas
* del coste directo con respecto a
* las variables de complicacion
SOLVE cdirect USING nlp MINIMIZING cd;

* Escritura
put "direct cost= ",cd.l:12:4," , modelstat= ",...
...cdirect.modelstat," , solvestat= ",cdirect.solvestat/;

```

```

* Calculo del coste total
Ctotal(IT)=Ctotal(IT)+cd.1;

* Derivadas parciales del coste total con respecto a las
* variables de complicacion
LambdaFc(IT)=LambdaFc(IT)+Fc.m;
LambdaTan(IT)=LambdaTan(IT)+tan.m;

* Escritura
put "Ctotal(",ord(IT):2," )=",Ctotal(IT):12:4/;
put "LambdaFc(",ord(IT):2," )=",LambdaFc(IT):12:4,...
..."LambdaTn(",ord(IT):2," )=",LambdaTan(IT):12:4/;

* Limite superior del optimo del coste total
Csup=Ctotal(IT);

* Calculo del error
error=(abs(Csup-Cinf)/Cinf);

* Escritura
put "Upper bound= ",Csup:12:4/;
put "Lower bound= ",Cinf:12:4/;
put "error= ",error:15:10//;
);

```

A.4. Código GAMS del Método de Relajación Aplicado al Muro

En esta sección se muestra el código GAMS del ejemplo del muro resuelto mediante el método de relajación:

```

$title Muro

file out1 /murorel.out/;

SETS
    X variables de diseno /mua,mub/
    A parametros y agentes /munu,muT,mugamma,muH,muS/
    B parametros estadisticos/sigmaa,sigmas,sigmanu,sigmaT,sigmagamma,sigmaH,sigmaS/
    M modos de fallo /turning,sliding,bearing/
    IT numero maximo de iteraciones /1*20/;

ALIAS(M,Maux);

SCALARS
    epsilon maxima tolerancia permitida /1e-8/
    error parametro de almacenamiento del error /1/
    iteration contador de iteraciones /0/
    rho coeficiente de relajacion /0.8/;

```

PARAMETERS

```

Flo(M) limites inferiores de los coeficientes de seguridad/
turning      1.5
sliding      1.6
bearing      1.5
/
Fr(M) valores reales de los coeficientes de seguridad
Fpar(M) valores actuales de los limites inferiores de los coeficientes de seguridad
betalo(M) limites inferiores de los indices de fiabilidad/
turning      3.0
sliding      3.0
bearing      3.0
/
betaa(M) valores reales de los indices de fiabilidad
betaux(M) valores auxiliares para el calculo del error
DataX(X) valores iniciales de las variables de diseno/
  mua 3
  mub 6
/
DataA(A) valores de los parametros y agentes/
  munu 0.3
  muT  50.0
  mugamma 23.0
  muH  3.0
  muS  220.0
/
DataB(B) valores de los parametros estadisticos/
  sigmaa 0.01
  sigmab 0.01
  sigmanu 0.05
  sigmaT 15.0
  sigmagamma 0.46
  sigmaH 0.2
  sigmaS 16.0
/;

```

VARIABLES

```

zc variable objetivo decada uno de los modelos
VarX(X) variables de diseno x
VarU(X) variables u asociadas a las x
VarV(A) variables v asociadas a las y
Z(B) variables auxiliares z;

```

EQUATIONS

```

* Ecuaciones del modelo para resolucion del problema maestro (clasico)
ZClassic, turning, sliding, bearing, geometric
* Ecuaciones para la resolucion de los subproblemas
Zbeta, ZUdef, ZVdef, Fturning, Fsliding, Fbearing;

* Ecuaciones del modelo para resolucion del problema maestro (clasico)

```

```

ZClassic..zc=e=VarX('mua')*VarX('mub');
turning..VarX('mua')*VarX('mua')*VarX('mub')*DataA('mugamma')=g=...
...2*DataA('muH')*DataA('muT')*Fpar('turning');
sliding..VarX('mua')*VarX('mub')*DataA('munu')*DataA('mugamma')=g=...
...DataA('muT')*Fpar('sliding');
bearing..DataA('muS')=g=VarX('mub')*DataA('mugamma')*Fpar('bearing');
geometric..VarX('mua')*2=e=VarX('mub');

* Ecuaciones para la resolucio de los subproblemas
Zbeta..ZC=e=sqrt(sum(B,sqr(Z(B))));
ZUdef(X,B)$ (ORD(X)=ORD(B))..Z(B)=e=(VarU(X)-DataX(X))/DataB(B);
ZVdef(A,B)$ (ORD(A)+CARD(X)=ORD(B))..Z(B)=e=(VarV(A)-DataA(A))/(DataB(B));
Fturning..VarU('mua')*VarU('mua')*VarU('mub')*VarV('mugamma')=e=...
...2*VarV('muH')*VarV('muT');
Fsliding..VarU('mua')*VarU('mub')*VarV('munu')*VarV('mugamma')=e=VarV('muT');
Fbearing..VarU('mub')*VarV('mugamma')=e=VarV('muS');

* Planteamiento de los modelos clasico y subproblemas
MODEL classic /ZClassic,turning,sliding,bearing,geometric/;
MODEL mturning /Zbeta,ZUdef,ZVdef,Fturning/;
MODEL msliding /Zbeta,ZUdef,ZVdef,Fsliding/;
MODEL mbearing /Zbeta,ZUdef,ZVdef,Fbearing/;

* Inicializacion de los limites inferiores de las restricciones
* asociadas a los coeficientes de seguridad
Fpar(M)=Flo(M);
betaa(M)=betalo(M);

* Comienzo del procedimiento iterativo
loop(IT$(error>epsilon),
iteration=iteration+1;
* Escritura del numero de iteraciones
put out1;
put " ITERATION ",iteration:5//;

put "----- CLASICO -----"/;
* Almacenamiento de los indices de fiabilidad para controlar el error
betaux(M)=betaa(M);
* Valores iniciales de las variables x
VarX.l(X)=DataX(X);
* Resolucion del model clasico
SOLVE classic USING nlp MINIMIZING zc;
* Escritura de resultados
put "coste=",zc.l:12:8, " modelstat= ",classic.modelstat,",...
... solvestat= ",classic.solvestat/;
put " cpu=",classic.resusd:9:5//;
put "Los valores medios son A=",VarX.l('mua'):8:3,",y B=",VarX.l('mub'):8:3/;
* Calculo del valor actual de los coeficientes de seguridad
put "Valores actuales de los coeficientes"/;
Fr('turning')=(VarX.l('mua')*VarX.l('mua')*VarX.l('mub')*DataA('mugamma')...
.../(2*DataA('muH')*DataA('muT')));

```

```

    Fr('sliding')=(VarX.l('mua')*VarX.l('mub')*DataA('munu')*DataA('mugamma')...
    .../DataA('muT'));
    Fr('bearing')=DataA('muS')/(VarX.l('mub')*DataA('mugamma'));
* Escritura de los valores actuales
    put "Fr('turning')=", Fr('turning')," Fr('sliding')=", Fr('sliding'),...
    ..." Fr('bearing')=", Fr('bearing')/;
* Almacenamiento en el parametro asociado de los valores optimos de x
    DataX(X)=VarX.l(X);
* Resolucion de los subproblemas
    loop(M,
* Valores iniciales de las variables u y v
        VarU.l(X)=DataX(X);
        VarV.l(A)=DataA(A);
        if(ORD(M) eq 1,
            put "----- VUELCO -----"/;
* Obtencion del indice de fiabilidad para rebase
            SOLVE mturning USING nlp MINIMIZING zc;
* Escritura de resultados
            put "beta=",zc.l:8:3, " modelstat= ",mturning.modelstat,", solvestat= ",...
            ...mturning.solvestat/;
            put " cpu=",mturning.resusd:9:5//;
        else
            if(ORD(M) eq 2,
                put "----- DESLIZAMIENTO -----"/;
* Obtencion del indice de fiabilidad para deslizamiento
                SOLVE msliding USING nlp MINIMIZING zc;
* Escritura de resultados
                put "betas=",zc.l:8:3, " modelstat= ",msliding.modelstat,", solvestat= ",...
                ...msliding.solvestat/;
                put " cpu=",msliding.resusd:8:3//;
            else
                put "----- HUNDIMIENTO -----"/;
* Obtencion del indice de fiabilidad para hundimiento
                SOLVE mbearing USING nlp MINIMIZING zc;
* Escritura de resultados
                put "betas=",zc.l:8:3, " modelstat= ",mbearing.modelstat,", solvestat= ",...
                ...mbearing.solvestat/;
                put " cpu=",mbearing.resusd:8:3//;
            );
        );
* Almacenamiento de los valores optimos de los indices de fiabilidad
        betaa(M)=zc.l;
    );
* Escritura de valores intermedios
    loop(M,
        put "beta('",M.tl,"')=",betaa(M):6:3," Fpar('",M.tl,"')=",Fpar(M):6:3,...
        ..." Fr('",M.tl:5,"')=",Fr(M):8:3/;
    );
* Actualizacion de los limites inferiores de los coeficientes de seguridad
    Fpar(M)=Fpar(M)+rho*(betao(M)-betaa(M));
* Comprobacion de que los nuevos limites no son inferiores a los requeridos

```

```

    loop(M,
        if(Fpar(M)<Flo(M),Fpar(M)=Flo(M));
    );
* Calculo del error
    error=0.0;
    loop(M,
        if(abs((betaa(M)-betaux(M))/betaa(M))>error,
            error=abs((betaa(M)-betaux(M))/betaa(M));
        );
    );
* Escritura
    put "error(",iteration:5,")= ",error:14:12/;

    put "-----"//;
);
* Fin del procedimiento iterativo

```

A.5. Código GAMS del Método de Aproximación por Hiperplanos

A continuación se muestra el código GAMS del ejemplo del muro resuelto mediante el método de aproximación por hiperplanos:

```

$title Muro por hiperplanos
* Inicializo el fichero de escritura de resultados

file out1 /murohiper.out/;

SETS
    X variables de diseno /mua,mub/
    A parametros /munu,muT,mugamma,muH,muS/
    B parametros y agentes /sigmaa,sigmas,sigmanu,sigmaT,sigmagamma,sigmaH,sigmaS/
    M modos de fallo /turning,sliding,bearing/
    IT numero maximo de iteraciones /1*20/
    ITER(IT) conjunto dinamico para controlar los hiperplanos
    FIRST(M) conjunto dinamico para la primera iteracion;

ALIAS(M,Maux);
* Desactivacion de los hiperplanos
ITER(IT)=no;
FIRST(M)=no;

SCALARS
    epsilon maxima tolerancia permitida /1e-8/
    error parametro de almacenamiento del error /1/
    iteration contados de iteraciones /0/;

PARAMETERS
    Flo(M) limites inferiores de los coeficientes de seguridad/

```

```

turning      1.5
sliding      1.6
bearing      1.5
/
Fr(M) valores reales de los coeficientes de seguridad
betalo(M) limites inferiores de los indices de fiabilidad/
turning      3.0
sliding      3.0
bearing      3.0
/
betaa(M) valores reales de los indices de fiabilidad
betaux(M) valores auxiliares para el calculo del error
DataX(X) valores iniciales de las variables de diseno /
mua 3
mub 6
/
DataA(A) valores de los parametros y agentes /
munu 0.3
muT 50.0
mugamma 23.0
muH 3.0
muS 220.0
/
DataB(B) valores de los parametros estadisticos/
sigmaa 0.01
sigmab 0.01
sigmanu 0.05
sigmaT 15.0
sigmagamma 0.46
sigmaH 0.2
sigmaS 16.0
/
lambdaK(IT,M,X) pendientes de los hiperplanos aproximantes
XesK(IT,X) valores optimos de las variables x
betaK(IT,M) valores de los indices de fiabilidad para cada valor de x;

```

VARIABLES

```

zc variable objetivo decada uno de los modelos
VarX(X) variables de diseno x
VarU(X) variables u asociadas a las x
VarV(A) variables v asociadas a los parametros y agentes
Z(B) variables auxiliares z
beta(M) valores actuales de los indices de fiabilidad;

```

EQUATIONS

```

* Ecuaciones del modelo para resolucion del problema maestro (clasico)
ZClassic,turning,sliding,bearing,geometric,betadef,auxbeta
* Ecuaciones para la resolucion de los subproblemas
Zbeta,ZUdef,ZVdef,Fturning,Fsliding,Fbearing,fixedX;

* Ecuaciones del modelo para resolucion del problema maestro (clasico)

```

```

ZClassic..zc=e=VarX('mua')*VarX('mub');
turning..VarX('mua')*VarX('mua')*VarX('mub')*DataA('mugamma')=g=...
...2*DataA('muH')*DataA('muT')*Flo('turning');
sliding..VarX('mua')*VarX('mub')*DataA('munu')*DataA('mugamma')=g=...
...DataA('muT')*Flo('sliding');
bearing..DataA('muS')=g=VarX('mub')*DataA('mugamma')*Flo('bearing');
geometric..VarX('mua')*2=e=VarX('mub');
betadef(ITER,M)$(FIRST(M))..beta(M)=1=betaK(ITER,M)+...
...sum(X,lambdaK(ITER,M,X)*(VarX(X)-XesK(ITER,X)));
auxbeta(M)$(FIRST(M))..beta(M)=g=betaLo(M);

* Ecuaciones para la resolucio de los subproblemas
Zbeta..zc=e=sqrt(sum(B,sqr(Z(B))));
ZUdef(X,B)$(ORD(X)=ORD(B))..Z(B)=e=(VarU(X)-VarX(X))/(DataB(B));
ZVdef(A,B)$(ORD(A)+CARD(X)=ORD(B))..Z(B)=e=(VarV(A)-DataA(A))/(DataB(B));
Fturning..VarU('mua')*VarU('mua')*VarU('mub')*VarV('mugamma')=e=...
...2*VarV('muH')*VarV('muT');
Fsliding..VarU('mua')*VarU('mub')*VarV('munu')*VarV('mugamma')=e=VarV('muT');
Fbearing..VarU('mub')*VarV('mugamma')=e=VarV('muS');
fixedX(X)..VarX(X)=e=DataX(X);

* Planteamiento de los modelos clasico y subproblemas
MODEL classic /ZClassic,turning,sliding,bearing,geometric,betadef,auxbeta/;
MODEL mturning/Zbeta,ZUdef,ZVdef,Fturning,fixedX/;
MODEL msliding/Zbeta,ZUdef,ZVdef,Fsliding,fixedX/;
MODEL mbearing/Zbeta,ZUdef,ZVdef,Fbearing,fixedX/;

* Inicializacion de los limites inferiores de los indices de fiabilidad
betaa(M)=betaLo(M);
lambdaK(IT,M,X)=0.0;
XesK(IT,X)=0.0;
betaK(IT,M)=0.0;

* Comienzo del procedimiento iterativo
loop(IT$(error>epsilon),
  iteration=iteration+1;
* Escritura del numero de iteraciones
  put out1;
  put "  ITERATION ",iteration:5//;
  put "----- CLASICO -----"/;
* Almacenamiento de los indices de fiabilidad para controlar el error
  betaux(M)=betaa(M);
* Valores iniciales de las variables x
  VarX.l(X)=DataX(X);
* Resolucion del model clasico
  SOLVE classic USING nlp MINIMIZING zc;
* Escritura de resultados
  put "coste=",zc.l:8:3, " modelstat= ",classic.modelstat,...
  ... solvestat= ",classic.solvestat/;
  put " cpu=",classic.resusd:8:3//;
  put "Los valores medios son A=",VarX.l('mua'):8:3," y B=",VarX.l('mub'):8:3/;

```

```

    put "Valores actuales de los coeficientes de seguridad"/;
* Calculo del valor actual de los coeficientes de seguridad
  Fr('turning')=(VarX.l('mua')*VarX.l('mua')*VarX.l('mub')*DataA('mugamma')...
  .../(2*DataA('muH')*DataA('muT')));
  Fr('sliding')=(VarX.l('mua')*VarX.l('mub')*DataA('munu')*DataA('mugamma')...
  .../DataA('muT')));
  Fr('bearing')=DataA('muS')/(VarX.l('mub')*DataA('mugamma'));
* Escritura de los valores actuales
  put "Fr('turning')=", Fr('turning')," Fr('sliding')=", Fr('sliding'),...
  ..." Fr('bearing')=", Fr('bearing')/;
* Almacenamiento en el parametro asociado de los valores optimos de x
  DataX(X)=VarX.l(X);
  XesK(IT,X)=DataX(X);
* Resolucion de los subproblemas
  loop(M,
* Valores iniciales de las variables u y v
  VarU.l(X)=DataX(X);
  VarV.l(A)=DataA(A);
  if(ORD(M) eq 1,
    put "----- VUELCO -----"/;
* Resolucion del subproblema asociado a rebase
  SOLVE mturning USING nlp MINIMIZING zc;
* Escritura de resultados
  put "beta=",zc.l:8:3, " modelstat= ",mturning.modelstat,",...
  ... solvestat= ",mturning.solvestat/;
  put " cpu=",mturning.resusd:9:5//;
  else
  if(ORD(M) eq 2,
    put "----- DESLIZAMIENTO -----"/;
* Resolucion del subproblema asociado a deslizamiento
  SOLVE msliding USING nlp MINIMIZING zc;
* Escritura de resultados
  put "betas=",zc.l:8:3, " modelstat= ",msliding.modelstat,",...
  ... solvestat= ",msliding.solvestat/;
  put " cpu=",msliding.resusd:8:3//;
  else
  put "----- HUNDIMIENTO -----"/;
* Resolucion del subproblema asociado a hundimiento
  SOLVE mbearing USING nlp MINIMIZING zc;
* Escritura de resultados
  put "betas=",zc.l:8:3, " modelstat= ",mbearing.modelstat,",...
  ... solvestat= ",mbearing.solvestat/;
  put " cpu=",mbearing.resusd:8:3//;
  );
);
* Almacenamiento de los valores optimos de los indices de fiabilidad
* y las derivadas parciales con respecto x
  betaa(M)=zc.l;
  lambdaK(IT,M,X)=fixedX.m(X);
  betaK(IT,M)=zc.l;
);

```

```

* Escritura de valores intermedios
  loop(M,
    put "beta('",M.tl:8,"')=",betaa(M):6:3," Fr('",M.tl:8,"')=",Fr(M):6:3/;
  );
* Calculo del error
  error=0.0;
  loop(M,
    if((abs(betaa(M)-betaux(M))/betaa(M))>error and betaa(M)>0,
      error=(abs(betaa(M)-betaux(M))/betaa(M));
    );
  );
* Escritura
  put "error(",iteration:5,")= ",error:10:7/;
* Acitvacion del hiperplano para las siguientes iteraciones
  FIRST(M)=yes;
  ITER(IT)=yes;
);
* Fin del procedimiento iterativo

```

A.6. Código GAMS para el Estudio de la Sensibilidad.

En esta sección se presentan los códigos GAMS para el estudio de las sensibilidades aplicados al ejemplo del muro. Dado que el estudio de sensibilidad sólo se aplica cuando el procedimiento ha convergido sólo se incluirá la parte de código que se necesita añadir a los programas presentados en las secciones A.4 y A.5.

Método de relajación. En el caso del método de relajación habría que añadir los siguientes elementos

PARAMETERS

```

* Puntos de maxima verosimilitud
  PMLU(M,X)
  PMLV(M,A)
* Parametros para almacenar las sensibilidades
  sensFclas(M)
  sensAclas(A)
  sensBclas(B)
  sensMclas(M)
  sensF(M,M)
  sensX(M,X)
  sensA(M,A)
  sensB(M,B);

```

VARIABLES

```

  VarA(A) variable auxiliar para los parametros y agentes
  VarB(B) variables auxiliar para los parametros estadisticos
  Zeta(M,B) variable auxiliar para las variables normales estandar
  Fa(M) variables auxiliares para los limites inferiores de los coeficientes...
... de seguridad;

```

```

EQUATIONS
* Ecuaciones del modelo para obtener las sensibilidades del problema maestro
* (clasico)
turningS, slidingS, bearingS, ZUsens, ZVsens, betasens
* Ecuaciones para las sensibilidades de los subproblemas
ZUdefS, ZVdefS;

* Ecuaciones del modelo para obtener las sensibilidades del problema maestro
* (clasico)
turningS..VarX('mua')*VarX('mua')*VarX('mub')*VarA('mugamma')=g=...
...2*VarA('muH')*VarA('muT')*Fa('turning');
slidingS..VarX('mua')*VarX('mub')*VarA('munu')*VarA('mugamma')=g=
...VarA('muT')*Fa('sliding');
bearingS..VarA('muS')=g=VarX('mub')*VarA('mugamma')*Fa('bearing');
ZUsens(M,X,B)$ (ORD(X)=ORD(B))..Zeta(M,B)=e=(PMLU(M,X)-VarX(X))/(VarB(B));
ZVsens(M,A,B)$ (ORD(A)+CARD(X)=ORD(B))..Zeta(M,B)=e=...
...(PMLV(M,A)-VarA(A))/(VarB(B));
betasens(M)..sqrt(sum(B,Zeta(M,B)*Zeta(M,B)))=g=betalo(M);

* Ecuaciones para las sensibilidades de los subproblemas
ZUdefS(X,B)$ (ORD(X)=ORD(B))..Z(B)=e=(VarU(X)-VarX(X))/VarB(B);
ZVdefS(A,B)$ (ORD(A)+CARD(X)=ORD(B))..Z(B)=e=(VarV(A)-VarA(A))/VarB(B));

* Planteamiento de los modelos de sensibilidad
MODEL classicS /ZClassic,turningS,slidingS,bearingS,geometric,ZUsens,ZVsens,...
...betasens/;
MODEL mturningS /Zbeta,ZUdefS,ZVdefS,Fturning/;
MODEL mslidingS /Zbeta,ZUdefS,ZVdefS,Fsliding/;
MODEL mbearingS /Zbeta,ZUdefS,ZVdefS,Fbearing/;

* Inicialización de los parametros de almacenamiento de los puntos de
* maxima verosimilitud (antes del comienzo del procedimiento iterativo)
PMLU(M,X)=0;
PMLV(M,A)=0;

* Almacenamiento de los puntos de maxima verosimilitud
* (en el loop M dentro del procedimiento iterativo, despues del calculo
* de los indices de fiabilidad)
PMLU(M,X)=VarU.l(X);
PMLV(M,A)=VarV.l(A);

* (Tras el procedimiento iterativo)
* Comienzo del estudio de sensibilidad
* Fijo las variables auxiliares a los valores de los paramentros
VarA.fx(A)=DataA(A);
VarB.fx(B)=DataB(B);
Fa.fx(M)=Flo(M);

* Inicializo los valores de las variables normales estandar
loop((M,X,B)$ (ORD(X)=ORD(B)),

```

```

      Zeta.l(M,B)=(PMLU(M,X)-VarX.l(X))/(VarB.l(B));
    );
loop((M,A,B)$ (ORD(A)+CARD(X)=ORD(B)),
      Zeta.l(M,B)=(PMLV(M,A)-VarA.l(A))/(VarB.l(B));
    );

* Resolucion del modelo clasico
SOLVE classicS USING nlp MINIMIZING cost;
* Escritura de resultados
put "cost=",cost.l:12:5, " modelstat= ",classicS.modelstat,",...
... solvestat= ",classicS.solvestat/;
put " cpu=",classicS.resusd:8:3//;
* Almacenamiento de las sensibilidades
sensFclas(M)=Fa.m(M);
sensAclas(A)=VarA.m(A);
sensBclas(B)=VarB.m(B);
sensMclas(M)=betasens.m(M);
* Escritura de las sensibilidades
put "CLASSIC SENSITIVITIES"/;
put "-----"/;
loop(M,
      put " Fa.m('",M.tl:8,"')",Fa.m(M):8:3/;
    );
put /;
loop(A,
      put " VarA.m('",A.tl:8,"')",VarA.m(A):8:3/;
    );
put /;
loop(B,
      put " VarB.m('",B.tl:8,"')",VarB.m(B):8:3/;
    );
put /;
loop(M,
      put " betasens.m('",M.tl:8,"')",betasens.m(M):8:3/;
    );
put /;
* Puesta a cero de las sensibilidades
Fa.m(M)=0;
VarA.m(A)=0;
VarB.m(B)=0;
betasens.m(M)=0;
* Fijo las variables de diseño al valor optimo
VarX.fx(X)=DataX(X);
* Ciclo para las sensibilidades de los modelos de fiabilidad
loop(M,
      VarU.l(X)=DataX(X);
      VarV.l(A)=DataA(A);
      if(ORD(M) eq 1,
* Obtencion del indice de fiabilidad para vuelco
      SOLVE mturningS USING nlp MINIMIZING zc;
* Escritura de resultados

```

```

        put "beta=",zc.l:12:5, " modelstat= ",mturningS.modelstat,",...
... solvestat= ",mturningS.solvestat/;
        put " cpu=",mturningS.resusd:8:3//;
        put "TURNING SENSITIVITIES"/;
        put "-----"/;
    else
        if(ORD(M) eq 2,
* Obtencion del indice de fiabilidad para deslizamiento
        SOLVE mslidingS USING nlp MINIMIZING zc;
* Escritura de resultados
        put "beta=",zc.l:12:5, " modelstat= ",mslidingS.modelstat,",...
... solvestat= ",mslidingS.solvestat/;
        put " cpu=",mslidingS.resusd:8:3//;
        put "SLIDING SENSITIVITIES"/;
        put "-----"/;
    else
* Obtencion del indice de fiabilidad para hundimiento
        SOLVE mbearingS USING nlp MINIMIZING zc;
* Escritura de resultados
        put "beta=",zc.l:12:5, " modelstat= ",mbearingS.modelstat,",...
... solvestat= ",mbearingS.solvestat/;
        put " cpu=",mbearingS.resusd:8:3//;
        put "BEARING SENSITIVITIES"/;
        put "-----"/;
    );
);
* Almacenamiento de las sensibilidades
sensX(M,X)=VarX.m(X);
sensA(M,A)=VarA.m(A);
sensB(M,B)=VarB.m(B);
* Escritura de las sensibilidades
loop(X,
    put " VarX.m('",X.tl:8,"')",VarX.m(X):8:3/;
);
put /;
loop(A,
    put " VarA.m('",A.tl:8,"')",VarA.m(A):8:3/;
);
put /;
loop(B,
    put " VarB.m('",B.tl:8,"')",VarB.m(B):8:3/;
);
put /;
* Puesta a cero de las sensibilidades
VarX.m(X)=0;
VarA.m(A)=0;
VarB.m(B)=0;
);

```

Método de aproximación por hiperplanos. En el caso del método de aproximación por hiperplanos habría que añadir los siguientes elementos:

PARAMETERS

```
* Pendientes de los hiperplanos aproximantes con respecto a parametros y agentes...
... y a paramentros estadisticos
    muK(M,A)
    deltaK(M,B)
* Parametros para almacenar las sensibilidades
    sensFclas(M)
    sensAclas(A)
    sensBclas(B)
    sensMclas(M)
    sensF(M,M)
    sensX(M,X)
    sensA(M,A)
    sensB(M,B);
```

VARIABLES

```
VarA(A) variable auxiliar para los parametros y agentes
VarB(B) variables auxiliar para los parametros estadisticos
Zeta(M,B) variable auxiliar para las variables normales estandar
Fa(M) variables auxiliares para los limites inferiores de los...
... coeficientes de seguridad;
```

EQUATIONS

```
* Ecuaciones del modelo para obtener las sensibilidades del problema maestro
* (clasico)
turningS,slidingS,bearingS,betadefS,fixedA(A),fixedB(B)
* Ecuaciones para las sensibilidades de los subproblemas
ZUdefS,ZVdefS;

* Ecuaciones del modelo para obtener las sensibilidades del problema maestro
* (clasico)
turningS..VarX('mua')*VarX('mua')*VarX('mub')*VarA('mugamma')=g=...
...2*VarA('muH')*VarA('muT')*Fa('turning');
slidingS..VarX('mua')*VarX('mub')*VarA('munu')*VarA('mugamma')=g=...
...VarA('muT')*Fa('sliding');
bearingS..VarA('muS')=g=VarX('mub')*VarA('mugamma')*Fa('bearing');
betadefS(ITER,M)$(FIRST(M))..beta(M)=1=betaK(ITER,M)+...
...sum(X,lambdaK(ITER,M,X)*(VarX(X)-XesK(ITER,X)))+...
...sum(A,muK(M,A)*(VarA(A)-DataA(A)))+sum(B,deltaK(M,B)*(VarB(B)-dataB(B)));

* Ecuaciones para las sensibilidades de los subproblemas
ZUdefS(X,B)$(ORD(X)=ORD(B))..Z(B)=e=(VarU(X)-VarX(X))/(VarB(B));
ZVdefS(A,B)$(ORD(A)+CARD(X)=ORD(B))..Z(B)=e=(VarV(A)-VarA(A))/(VarB(B));

* Planteamiento de los modelos de sensibilidad
MODEL mturningS /Zbeta,ZUdefS,ZVdefS,Fturning,fixedX/;
MODEL mslidingS /Zbeta,ZUdefS,ZVdefS,Fsliding,fixedX/;
MODEL mbearingS /Zbeta,ZUdefS,ZVdefS,Fbearing,fixedX/;
```

```

MODEL classicS /ZClassic,turningS,slidingS,bearingS,geometric,betadefS,auxbeta/;

* Comienzo del estudio de sensibilidad
* Fijo las variables auxiliares a los valores de los paramentos
VarA.fx(A)=DataA(A);
VarB.fx(B)=DataB(B);
* Inicializacion de parametros
muK(M,A)=0;
deltaK(M,B)=0;
* Ciclo para las sensibilidades de los modelos de fiabilidad
loop(M,
  VarU.l(X)=DataX(X);
  VarV.l(A)=DataA(A);
  if(ORD(M) eq 1,
* Obtencion del indice de fiabilidad para vuelco
  SOLVE mturningS USING nlp MINIMIZING zc;
* Escritura de resultados
  put "beta=",zc.l:12:5, " modelstat= ",mturningS.modelstat,",...
... solvestat= ",mturningS.solvestat/;
  put " cpu=",mturningS.resusd:8:3//;
  put "TURNING SENSITIVITIES"/;
  put "-----"/;
  else
  if(ORD(M) eq 2,
* Obtencion del indice de fiabilidad para deslizamiento
  SOLVE mslidingS USING nlp MINIMIZING zc;
* Escritura de resultados
  put "beta=",zc.l:12:5, " modelstat= ",mslidingS.modelstat,",...
... solvestat= ",mslidingS.solvestat/;
  put " cpu=",mslidingS.resusd:8:3//;
  put "SLIDING SENSITIVITIES"/;
  put "-----"/;
  else
* Obtencion del indice de fiabilidad para hundimiento
  SOLVE mbearingS USING nlp MINIMIZING zc;
* Escritura de resultados
  put "beta=",zc.l:12:5, " modelstat= ",mbearingS.modelstat,",...
... solvestat= ",mbearingS.solvestat/;
  put " cpu=",mbearingS.resusd:8:3//;
  put "BEARING SENSITIVITIES"/;
  put "-----"/;
  );
);
* Almacenamiento de las sensibilidades
muK(M,A)=VarA.m(A);
deltaK(M,B)=VarB.m(B);
sensX(M,X)=fixedX.m(X);
sensA(M,A)=VarA.m(A);
sensB(M,B)=VarB.m(B);
* Escritura de las sensibilidades
loop(X,

```

```

        put " VarX.m('",X.tl:8,"')",fixedX.m(X):8:3/;
    );
    put /;
    loop(A,
        put " VarA.m('",A.tl:8,"')",VarA.m(A):8:3/;
    );
    put /;
    loop(B,
        put " VarB.m('",B.tl:8,"')",VarB.m(B):8:3/;
    );
    put /;
* Puesta a cero de las sensibilidades
    VarX.m(X)=0;
    VarA.m(A)=0;
    VarB.m(B)=0;
);
* Fijo las variables auxiliares a los valores de los limites
* inferiores de los coeficientes de seguridad
Fa.fx(M)=Flo(M);
* Resolucion del modelo clasico
SOLVE classicS USING nlp MINIMIZING zc;
* Escritura de resultados
put "z=",zc.l:8:3, " modelstat= ",classicS.modelstat,",...
... solvestat= ",classicS.solvestat/;
put " cpu=",classicS.resusd:8:3//;
* Almacenamiento de las sensibilidades
sensFclas(M)=Fa.m(M);
sensAclas(A)=VarA.m(A);
sensBclas(B)=VarB.m(B);
sensMclas(M)=auxbeta.m(M);
* Escritura de las sensibilidades
put "CLASSIC SENSITIVITIES"/;
put "-----"/;

loop(M,
    put " Fa.m('",M.tl:8,"')",Fa.m(M):8:3/;
);
put /;
loop(A,
    put " VarA.m('",A.tl:8,"')",VarA.m(A):8:3/;
);
put /;
loop(B,
    put " VarB.m('",B.tl:8,"')",VarB.m(B):8:3/;
);
put /;
loop(M,
    put " Auxbeta.m('",M.tl:8,"')",auxbeta.m(M):8:3/;
);
put /;
put ///;

```


Bibliografía

- [1] ABADIE, J., AND CARPENTIER, J. Generalization of the wolfe reduced gradient method to the case of nonlinear constraints. In *Optimization*, R. Fletcher, Ed. Academic Press, New York, 1969, pp. 37–47.
- [2] ABDO, R., AND RACKWITZ, R. A new beta-point algorithm for large variable problems in time-invariant and time-variant reliability problems. In *Proceedings 3rd IFIP WG7.5 Working Conf. on Reliability and Optimization of Structural Systems (1990)*, A. Der Kiureghian and P. Thoft-Christensen, Eds., 112, Springer.
- [3] ACZÉL, J. Lectures on functional equations and their applications. In *Mathematics in Science and Engineering*, vol. 19. Academic Press, 1966.
- [4] ADELI, H. *Advances in design Optimization*. Chapman & Hall, New York, 1994.
- [5] ALONSO, E. E. Risk analysis of slopes and its application to slopes in canadian sensitive clays. *Geotechnique* 26, 3 (1976), 453–472.
- [6] ANG, A. H. S., SHINOZUKA, M., AND SCHUÉLLER, G. I. Structural safety and reliability. In *Proceedings ICOSSAR '89, 5th International Conference on Structural Safety and Reliability* (San Francisco, California, August 7–11 1989), vol. 1–3, ASCE. New York, 1990.
- [7] ARORA, S. Computational design optimization: A review and future directions. *Structural Safety* 7, 2–4 (1990), 131–148.
- [8] AUGUSTI, G., BORRI, A., AND VANNUCCHI, G. Applications of statistics and probability in soil and structural engineering. In *Proceedings ICASP* (Florence, Italy, June 13–17 1983), vol. 1–3, Pitagora Editrice. Bologna.
- [9] BAKER, R., AND GARBER, M. Variational approach to slope stability. In *Proceedings of the 9th International Conference on Soil Mechanics and Foundations Engineering* (Tokyo, 1977), vol. 2, pp. 9–12.
- [10] BAKER, R., AND GARBER, M. Theoretical analysis of the stability of slopes. *Geotechnique* 28, 4 (1978), 395–411.
- [11] BARABOSA, M. R., MORRIS, D. V., AND SARMA, S. K. Factor of safety and probability of failure of rockfill embankments. *Geotechnique* 39, 3 (1989), 471–483.

- [12] BASLER, B. Untersuchungen über den sicherheitsbegriff von bauwerken. *Schweiz. Arch.* 27, 4 (1961), 133–160.
- [13] BAZARAA, M. S., JARVIS, J. J., AND SHERALI, H. D. *Linear Programming and Network Flows*, second edition ed. John Wiley & Sons, New York, 1990.
- [14] BAZARAA, M. S., SHERALI, H. D., AND SHETTY, C. M. *Nonlinear Programming. Theory and Algorithms*, second edition ed. John Wiley & Sons, New York, 1993.
- [15] BERTSEKAS, D. P. *Constrained Optimization and Lagrange Multiplier Methods*. Academic Press, New York, 1982.
- [16] BISSCHOP, J., AND ROELOFS, M. *AIMMS, The User's guide*. Paragon Decision Technology, 1999.
- [17] BJERAGER, P. Probability integration by directional simulation. *J. Engineering Mechanics, ASCE* 114, 8 (1988), 1285–1302.
- [18] BJERAGER, P. On computational methods for structural reliability analysis. *Structural Safety* 9, 2 (1990), 79–96.
- [19] BJERAGER, P., AND KRENK, S. Parametric sensitivity in first order reliability theory. *J. Engineering Mechanics, ASCE* 115, 7 (1989), 1577–1582.
- [20] BLOCKLEY, D. I. *Engineering Safety*. McGraw-Hill, London, 1992.
- [21] BOX, G. E. P., AND MULLER, M. E. A note on the generation of normal deviates. *Ann. Math. Stat.* 29 (1958), 610–611.
- [22] BREITUNG, K. Asymptotic approximations for multinormal integrals. *J. Engrg. Mech.* 100, 3 (1984), 357–366.
- [23] BUCHER, C. G. Adaptative sampling, an iterative fast monte carlo procedure. *Structural Safety* 5, 2 (1988), 119–126.
- [24] CARNAHAN, B., LUTHER, H. A., AND WILKES, J. O. *BApplied numerical methods*. John Wiley & Sons, New York, 1969.
- [25] CASAS, J. E. Reliability-based partial safety factors in cantilever construction of concrete bridges. *Journal of Structural Engineering* 123, 3 (1997), 305–312.
- [26] CASTILLO, C., MÍNGUEZ, R., LOSADA, M., AND CASTILLO, E. An optimal engineering design method with failure rate constraints and sensitivity analysis. application to vertical breakwaters. *Coastal Engineering* (2003). In review.
- [27] CASTILLO, E. *Extreme Value Theory in Engineering*. Academic Press, New York, 1988.
- [28] CASTILLO, E., CONEJO, A., MÍNGUEZ, R., AND CASTILLO, C. An alternative approach for addressing the failure probability-safety factor method with sensitivity analysis. *Reliability Engineering and System Safety* 82 (2003), 207–216.

- [29] CASTILLO, E., CONEJO, A., PEDREGAL, P., GARCÍA, R., AND ALGUACIL, N. *Building and Solving Mathematical Programming Models in Engineering and Science*. John Wiley & Sons Inc., New York, 2001. Pure and Applied Mathematics: A Wiley-Interscience Series of Texts, Monographs and Tracts.
- [30] CASTILLO, E., FERNÁNDEZ-CANTELI, A., AND MÍNGUEZ, R. Computing failure probabilities. applications to reliability analysis. *Reliability Engineering and System Safety* 77 (2002), 131–141.
- [31] CASTILLO, E., LOSADA, M., MÍNGUEZ, R., CASTILLO, C., AND BAQUERIZO, A. An optimal engineering design method that combines safety factors and failures probabilities. application to rubblemound breakwaters. *Journal of Waterways, Ports, Coastal and Ocean Engineering, ASCE* (2003). Accepted.
- [32] CASTILLO, E., AND LUCEÑO, A. One application of the calculus of variations to bearing capacity of foundations. In *Second International Conference on Applied Numerical Modeling* (Madrid, 1978), pp. 1–11.
- [33] CASTILLO, E., AND LUCEÑO, A. Application of the calculus of variations to the vertical cut off in cohesive frictionless soil (discussion). *Geotechnique* 30, 1 (1980), 1–16.
- [34] CASTILLO, E., AND LUCEÑO, A. Application of the calculus of variations to the vertical cut-off in cohesive frictionless soil (discussion by j. de jong). *Geotechnique* 30 (1981), 295–296.
- [35] CASTILLO, E., AND LUCEÑO, A. A critical analysis of some variational methods in slope stability analysis. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics* 6 (1982), 195–209.
- [36] CASTILLO, E., AND LUCEÑO, A. Variational methods and the upper bound theorem. *Journal of Engineering Mechanics, ASCE* 109, 5 (1983), 1157–1174.
- [37] CASTILLO, E., MÍNGUEZ, R., RUIZ, A., AND FERNÁNDEZ-CANTELI, A. Design and sensitivity analysis using the probability-safety-factor method. an application to retaining walls. *Structural Safety* (2003). Accepted.
- [38] CASTILLO, E., MÍNGUEZ, R., RUIZ, A., AND FERNÁNDEZ-CANTELI, A. Design of a composite beam using the probability-safety-factor method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* (2003). In review.
- [39] CASTILLO, E., ORTIGOSA, D., CONEJO, A., AND MÍNGUEZ, R. A perturbation approach to sensitivity analysis in nonlinear programming. *Mathematical Programming* (2003). In review.
- [40] CASTILLO, E., AND REVILLA, J. The calculus of variations and the stability of slopes. In *Proceedings of the 9th International Conference on Soil Mechanics and Foundations Engineering* (Tokyo, 1977), vol. 2, pp. 25–30.

- [41] CASTILLO, E., AND RUIZ, R. *Functional Equations in Science and Engineering*. Marcel Dekker, 1992.
- [42] CASTILLO, E., SOLARES, C., AND GÓMEZ, P. Estimating extreme probabilities using tail simulated data. *International Journal of Approximate Reasoning* (1996).
- [43] CASTILLO, E., SOLARES, C., AND GÓMEZ, P. Tail sensitivity analysis in bayesian networks. In *In Proceedings of the Twelfth Conference on Uncertainty in Artificial Intelligence (UAI'96)* (Portland (Oregon), 1996), Morgan Kaufmann Publishers, San Francisco, California, pp. 133–140.
- [44] CASTILLO, E., SOLARES, C., AND GÓMEZ, P. High probability one-sided confidence intervals in reliability models. *Nuclear Science and Engineering* 126 (1997), 158–167.
- [45] CHEN, W. F., AND GIGER, M. W. Limit analysis of stability of slopes. *Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division, ASCE* (1971).
- [46] CHEN, W. F., AND SNITBHAN, N. On slip surface and slope stability analysis. *Soils and Foundations* 15 (1975), 41–49.
- [47] CHRISTIAN, J. T., LADD, C. C., AND BAECHEER, G. B. Reliability applied to slope stability analysis. *Journal of Geotechnical Engineering Division, ASCE* 120, 12 (1994), 2180–2207.
- [48] COHEN, G. Auxiliary problem principle and decomposition of optimization problems. *Journal of Optimization Theory and Applications* 32, 3 (November 1980).
- [49] CONEJO, A. J., NOGALES, F. J., AND PRIETO, F. J. A decomposition procedure based on approximate newton directions. *Math. Program. A* (2002).
- [50] CORNELL, C. A. A probability based structural code. *J. Amer. Concrete Inst.* 66, 12 (1969), 974–985.
- [51] CORNELL, C. A. First-order uncertainty analysis of soil deformation and stability. In *Proceedings of the 1st International Conference on Application of Statistics and Probability to Soil and Structural Engineering* (Hong Kong, 1971), pp. 129–144.
- [52] DAI, Y. F., G., D., AND STOLTE, W. J. A probabilistic slope stability analysis using deterministic computer software. In *Proceedings of the Conference on Probabilistic Methods in Geotechnical Engineering* (Canberra, Australia, February 1993), pp. 10–12.
- [53] DALHQUIST, G., AND BJÖRCK, A. *Numerical Methods*. Prentice-Hall, Englewoods, New York, 1974.
- [54] DAVIES, R. B. Numerical inversion of a characteristic function. *Biometrika* 60 (1973), 415–417.
- [55] DAVIS, P. J., AND RABINOWITZ, P. *Methods of Numerical Integration*. Academic Press, New York, 1975.

- [56] DEL ESTADO, P. Rom 0.0, procedimiento general y bases de cálculo en el proyecto de obras marítimas y portuarias. Tech. rep., Puertos del Estado, Madrid, España, Noviembre 2001. pp 245.
- [57] DER KIUREGHIAN, A. Bayesian analysis of model uncertainty in structural reliability. In *Proc. 3rd IFIP WG7.5 Conf. Reliability and Optimization of Structural Systems* (Berlin, 1990), Springer, pp. 211–221.
- [58] DER KIUREGHIAN, A., AND DAKESSIAN, T. Multiple design points in first and second-order reliability. *Structural Safety* 20, 1 (1998), 37–50.
- [59] DER KIUREGHIAN, A., AND DE STAFENO, M. Efficient algorithm for second-order reliability analysis. *J. Engineering Mechanics, ASCE* 117, 12 (1991), 2904–2923.
- [60] DER KIUREGHIAN, A., LIN, H. Z., AND HWANG, S. Second order reliability approximations. *Journal of Engineering Mechanics, ASCE* 113, 8 (1987), 1208–1225.
- [61] DER KIUREGHIAN, A., AND POLAK, E. Reliability-based optimal design: A decouple approach. In *Reliability and Optimization of Structural Systems*, A. S. Nowak, Ed. Book Crafters, Chelsea, Mich., 1998, pp. 197–205.
- [62] DER KIUREGHIAN, A., AND THOFT-CHRISTENSEN, P. Reliability and optimization of structural systems '90. In *Proceedings of the third IFIP WG 7.5 Conference on Reliability and Optimization of Structural Systems* (Berkeley, California, USA, March, 26–28 1990), vol. 61 of *Lecture Notes in Engineering*, Springer-Verlag, Berlin.
- [63] DITLEVSEN, O. Structural reliability and the invariance problem. Solid Mechanics Report 22, University of Waterloo, 1973.
- [64] DITLEVSEN, O. Principle of normal tail approximation. *J. Engineering Mechanics Div., ASCE* 107, EM6 (1981), 1191–1208.
- [65] DITLEVSEN, O. *Uncertainty modeling with applications to multidimensional engineering systems*. McGraw-Hill Book Co., New York, 1981.
- [66] DITLEVSEN, O., AND BJERAGER, P. Plastic reliability analysis by directional simulation. *J. Engineering Mechanics Div., ASCE* 115, 6 (1989), 1347–1362.
- [67] DITLEVSEN, O., AND MADSEN, H. O. *Structural reliability methods*. Wiley, Chichester, New York, 1996.
- [68] DITLEVSEN, O., OLESEN, R., AND MOHR, G. Solution of a class of load combination problems by directional simulation. *Structural Safety* 4 (1987), 95–109.
- [69] DOLINSKY, K. First order second-moment approximation in reliability of structural systems: critical review and alternative approach. *Structural Safety* 1, 3 (1983), 211–231.
- [70] ENEVOLDSEN, I. *Reliability-based structural optimization*. PhD thesis, University of Aalborg, Aalborg, Denmark, 1991.

- [71] ENEVOLDSEN, I. Sensitivity analysis of reliability-based optimal solution. *Journal of Engineering Mechanics* 120, 1 (1994), 198–205.
- [72] ENEVOLDSEN, I., AND SORENSEN, J. D. Reliability-based optimization of series systems of parallel systems. *Journal of Structural Engineering* 119, 4 (1993), 1069–1084.
- [73] ENEVOLDSEN, I., AND SORENSEN, J. D. Reliability-based optimization in structural engineering. *Structural Safety* 15 (1994), 169–196.
- [74] ENGELUND, S., AND RACKWITZ, R. A benchmark study on importance sampling techniques in structural reliability. *Structural Safety* 12, 4 (1993), 255–276.
- [75] ESTEVA, L. Y RUIZ, S. E. Proceedings icasp 6. In *Sixth International Conference on Applications of Statistics and Probability in Civil Engineering* (Mexico City, June 17–21 1991), vol. 1–3.
- [76] Eurocode, 1991. Part 1.
- [77] FIELD, C. Tail areas of linear combinations of chi-squares and non-central chi-squares. *J. of Statistical Computation and Simulation* 15 (1996/1993), 243–248.
- [78] FOURER, R., GAY, D. M., AND KERNIGHAN, B. W. *AMPL: A Modelling Language for Mathematical Programming*. boyd & fraser publishing company, Massachusetts, 1993.
- [79] FRANGOPOL, D. M. Sensitivity of reliability-based optimum design. *J. Struct. Engrg., ASCE* 111, 8 (1985), 1703–1721.
- [80] FRANGOPOL, D. M. Reliability-based optimum structural design. In *Probabilistic Structural Mechanics Handbook*, C. Sundarajan, Ed. Chapman & Hall, New York, 1995, ch. 16, pp. 352–387.
- [81] FRANGOPOL, D. M., AND HENDAWI, S. Incorporation of corrosion effects in reliability-based optimization of composite hybrid plate girders. *Structural Safety* 16, 1+2 (1994), 145–169.
- [82] FREUDENTHAL, A.Ñ. Safety and the probability of structural failure. *Transactions, ASCE* 121 (1956), 1337–1397.
- [83] GABRIELE, G. A., AND RAGSDALL, K. The generalized reduced gradient method: A reliable tool for optimal design. *ASME J. Engin. Ind.* 99, 2 (May 1977), 394–400.
- [84] GALAMBOS, J. *The Asymptotic Theory of Extreme Order Statistics*. Robert E. Krieger Publishing Company, Malabar, Florida, 1987.
- [85] GARBER, M., AND BAKER, R. Bearing capacity by variational method. *Journal of the Geotechnical Engineering Division, ASCE* 103 (1977), 1209–1225.

- [86] GASSER, M., AND SCHUËLLER, G. I. Some basic principles in reliability-based optimization (rbo) of structures and mechanical components. In *Stochastic programming methods and technical applications*, K. Marti and P. Kall, Eds. Springer-Verlag, Berlin, Germany, 1998, pp. 11–103. Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems 458.
- [87] GILL, P. E., MURRAY, W., AND WRIGHT, M. H. *Practical Optimization*. Academic Press, New York, 91.
- [88] GIVENS, G. H., AND RAFTERY, A. E. Local adaptive importance sampling for multivariate densities with strong nonlinear relationships. *Journal of the American Statistical Association* 91, 433 (1996), 132–141.
- [89] HARBITZ, A. An efficient sampling method for probability of failure calculation. *Structural Safety* 3, 2 (1986), 109–115.
- [90] HASKIN, F. E., STAPLE, B. D., AND DING, C. Efficient uncertainty analyses using fast probability integration. *Nuclear Engineering and Design* (1996), 225–248.
- [91] HASOFER, A. M., AND LIND, N. C. Exact and invariant second moment code format. *J. Engrg. Mech.* 100, EM1 (1974), 111–121.
- [92] HESTERBERG, T. Weighted average importance sampling and defensive mixture distributions. *Technometrics* 37, 2 (1995), 185–194.
- [93] HIRIART-URRUTY, J. B., AND LEMARÈCHAL, C. *Convex Analysis and Minimization Algorithms*, vol. I and II. Springer Verlag, Berlin, 1996.
- [94] HOHENBICHLER, M., AND RACKWITZ, R. Non-normal dependent vectors in structural safety. *J. Engineering Mechanics Div., ASCE* 107, 6 (1981), 1227–1238.
- [95] HOHENBICHLER, M., AND RACKWITZ, R. Sensitivity and importance measures in structural reliability. *Civil Engineering Systems* 3, 4 (1986), 203–209.
- [96] HORNE, M. R., AND H., P. P. Commentary on the level 2 procedure, rationalization of safety and serviceability factors in structural codes. Report 63, Construction Industry Research and Information Association, London, 1977.
- [97] JANBU, N. Application of composite slip surfaces for stability analysis. In *Proc. European Conf. Stability of Earth Slopes* (Stockholm, 1954), vol. 3, pp. 43–49.
- [98] KARAMCHANDANI, A., BJERAGER, P., AND CORNELL, C. A. Adaptive importance sampling. In *In Proceedings 5th International Conference on Structural Safety and Reliability* (San Francisco, 1989), ASCE, pp. 855–862.
- [99] KARAMCHANDANI, A., AND CORNELL, C. Sensitivity estimation within first and second order reliability methods. *Structural Safety* 11, 1 (1994), 59–74.
- [100] KATSUKI, S., AND FRANGOPOL, D. M. Hyperspace division method for structural reliability. *Journal of Engineering Mechanics, ASCE* 120, 11 (1994), 2405–2427.

- [101] KELLEY, J. E. The cutting plane method for solving convex programs. *J. Soc. Ind. and Appl. Math.* 8, 4 (1960), 703–712.
- [102] KIRJNER-NETO, C., POLAK, E., AND DER KIUREGHIAN, A. An outer approximations approach to reliability-based optimal design of structures. *J. Optimization Theory and Application* 98, 1 (1998), 1–17.
- [103] KONISHI, I., ANG, A. H.-S., AND SHINOZUKA, M. Structural safety and reliability. In *Proceedings 4th International Conference on Structural Safety and Reliability, IASSAR* (Kobe, Japan, May 10–13 1985), vol. I–III.
- [104] KOYLUOGLU, H. U., AND NIELSEN, R. K. New approximations for sorm integrals. *Structural Safety* 13 (1994), 235–246.
- [105] KUSCHEL, N., AND RACKWITZ, R. A new approach for structural optimization of series system. In *Proceedings 8th Int. Conf. on Applications of Statistics and Probability (ICASP) in Civ. Engineering Reliability and Risk Anal.* (Sydney, Australia, 2000), R. Melchers and M. G. Steward, Eds., vol. 2, pp. 987–994.
- [106] LEMAIRE. Applications of statistics and probability. In *Proceedings ICASP 7* (Paris, France, JULY 10–13 1995), vol. 1–2, Balkema, Rotterdam.
- [107] LI, K. S., AND LUMB, P. Probabilistic design of slopes. *Can. Geotech. J.* 24 (1987), 520–535.
- [108] LIN, Y. K. Reliability and risk analysis in civil engineering. In *Proceedings 6th Specialty Conference on Probabilistic Mechanics and Structural and Geotechnical Reliability* (Denver, Colorado, July, 8–10 1992), Y. K. Lin, Ed., ASCE, New York.
- [109] LIND, N. C. Reliability and risk analysis in civil engineering. In *Proceedings ICASP 5, Fifth International Conference on Applications of Statistics and Probability in Civil Engineering* (University of British, Columbia, Vancouver, May 25–29 1987), University of Waterloo, Waterloo, Canada.
- [110] LIU, P-L Y DER KIUREGHIAN, A. Optimization algorithms for structural reliability. *Structural Safety* 9 (1991), 161–177.
- [111] LOW, B. K., AND TANG, W. H. Efficient reliability evaluation using spreadsheet. *Journal of Engineering Mechanics, ASCE* 123, 7 (1994), 749–752.
- [112] LUCEÑO, A. *Análisis de los métodos variacionales aplicados a los problemas de estabilidad en mecánica del suelo. Utilización del teorema de la cota superior.* PhD thesis, University of Cantabria, Santander, Spain, 1979.
- [113] LUENBERGER, D. G. *Linear and Nonlinear Programming*, second edition ed. Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1989.
- [114] MADSEN, H. D., KRENK, S., AND LIND, N. C. *Methods of structural safety*, second edition ed. Prentice Hall, Inc., Englewood Cliffs, New York, 1986.

- [115] MADSEN, H. O., AND FRIIS HANSEN, P. A comparison of some algorithms for reliability-based structural optimization and sensitivity analysis. In *Reliability and Optimization of Structural Systems*, R. Rackwitz and P. Thoft-Christensen, Eds. Springer, Berlin, 1992, pp. 443–451.
- [116] MALKAWI, A. I. H., HASSAN, W. F., AND ABDULLA, F. A. Uncertainty and reliability analysis applied to slope stability. *Structural Safety* 22 (2000), 161–187.
- [117] MARTI, K. Solving stochastic structural optimization problems by rsm-based stochastic approximation methods: Gradient estimation in case of intermediate variables. *Mathematical Methods of Operations Res.* 46 (1997), 409–434.
- [118] MAYER, H. *Die Sicherheit der Bauwerke*. Springer, Berlin, 1926.
- [119] MELCHERS, R. E. Improved importance sampling for structural reliability calculation. In *In Proceedings 5th International Conference on Structural Safety and Reliability* (New York, 1989), ASCE, pp. 1185–1192.
- [120] MELCHERS, R. E. Simulation in time-invariant and time-variant reliability problems. In *In Proceedings 4th IFIP Conference on Reliability and Optimization of Structural Systems* (Berlin, 1991), Springer, pp. 39–82.
- [121] MELCHERS, R. E. *Structural reliability analysis and prediction*, second edition ed. John Wiley & Sons, New York, 1999.
- [122] MELCHERS, R. E., AND LI, C. Q. Discussion of engelund, s. and rackwitz, r. *Structural Safety* 14, 4 (1993), 299–302.
- [123] MUROTSU, Y., KISHI, M., OKADA, H., YONEZAWA, M., AND TAGUCHI, K. Probabilistic optimum design of frame structure. In *11 th IFIP Conference on System Modeling and Optimization* (Berlin, 1984), Springer-Verlag, pp. 545–554.
- [124] NATAF, A. Determination des distribution dont les marges sont donnees. *Comptes Rendus de l'Academie des Sciences*, 225 (1962), 42–43.
- [125] <http://www.aimms.com/>.
- [126] <http://www.dashopt.com>.
- [127] <http://www.gams.com>.
- [128] <http://www.lindo.com>.
- [129] <http://www.maximal-usa.com>.
- [130] PAPADIMITRIOU, C. BECK, J. L., AND KATAFYGIOTIS, L. S. Asymptotic expansions for reliability and moments of uncertain systems. *Journal of Engineering Mechanics, ASCE* 123, 12 (1997), 1219–1229.
- [131] PARKINSON, D. B. Computer solution for the reliability index. *Engineering Structures* 2 (1980), 57–62.

- [132] POLAK, E. *Optimization: Algorithms and Consistent Approximations*. Springer, New York, 1997.
- [133] POLYAK, B. T. *Introduction to Optimization*. Optimization Software, New York, 1987.
- [134] POWELL, M. J. D. Vmcdw: A fortran subroutine for constrained optimization. Report DAMPT 1982/NA4, Cambridge University, United Kingdom, 1982.
- [135] RACKWITZ, R., AUGUSTI, G., AND BORRI, A. Reliability and optimization of structural systems. In *Proceedings of the Sixth IFIP WG 7.5 Conference on Reliability and Optimization of Structural Systems* (Assisi, Perugia, Italy, September, 7–9 1994), Chapman & Hall, London.
- [136] RACKWITZ, R., AND FIESSLER, B. Structural reliability under combined load sequences. *Comput. Struct.* 9 (1978), 489–484.
- [137] RACKWITZ, R., AND THOFT-CHRISTENSEN, P. Reliability and optimization of structural systems '91. In *Proceedings of the fourth IFIP WG 7.5 Conference on Reliability and Optimization of Structural Systems* (Munich, Germany, September, 11–13 1991), vol. 76 of *Lecture Notes in Engineering*, Springer-Verlag, Berlin.
- [138] REVILLA, J., AND CASTILLO, E. The calculus of variations applied to stability of slopes. *Geotechnique* 27, 1 (1977), 1–1.
- [139] ROSEN, J. B. The gradient projection method for nonlinear programming, part i, linear constraints. *SIAM J. Appl. Math.* 8 (1960), 181–217.
- [140] ROSENBLATT, M. Remarks on a multivariate transformation. *Ann. Math. Stat.* 23, 3 (1952), 470–472.
- [141] ROWE, W. D. *An Anatomy of Risk*. John Wiley & Sons, New York, 1977.
- [142] ROYSET, J. O., DER KIUREGHIAN, A., AND POLAK, E. Reliability-based optimal design of series structural systems. *Journal of Engineering Mechanics, ASCE* 127, 6 (2001), 607–614.
- [143] RUBINSTEIN, B. V. *Simulation and the Monte Carlo Method*. John Wiley & Sons, New York, 1981.
- [144] RZHANITZYN, R. It is necessary to improve the standards of design of building structures. a statistical method of design of building structures. Technical Translation, by Allan D. E. 1368, National Research Council of Canada, Ottawa, 1957.
- [145] RZHANITZYN, R. Risk: analysis, perception and management. Tech. rep., Royal Society Study Group, London, 1991.
- [146] SCHITKOWSKI, K. Nlpql: A fortran subroutine solving constrained non-linear programming problems. *Ann. Oper. Res.* 5 (1985), 485–500.

- [147] SCHUËLLER, G. I., SHINOZUKA, M., AND YAO, J. T. P. Structural safety and reliability. In *Proceedings ICOSSAR '93, 6th International Conference on Structural Safety and Reliability* (Innsbruck, Austria, August 9–13 1993), vol. 1–3, Balkema. Rotterdam, 1994.
- [148] SHINOZUKA, M. Stochastic methods in structural dynamics. Stochastic fields and their digital simulations, Martinus Nijhoff, The Hague, 1987.
- [149] SIEGMUND, D. Importance sampling in the monte carlo study of sequential tests. *The Annals of Statistics* 4 (1976), 673–684.
- [150] SMICHT, L. A. Structural design by systematic synthesis. In *Proceedings of the Second ASCE Conference on Electronic Computation* (Pittsburgh, Pennsylvania, 1960), pp. 105–122.
- [151] SOBIESKI, J. S., BARTHELEMY, J. F., AND RILEY, K. M. Sensitivity of optimal solutions of problems parameters. *AIAA J.* 20, 9 (1982), 1291–1299.
- [152] SORENSEN, J. D. Reliability-based optimization of structural elements. Structural reliability theory, The Uni. of Aalborg, Aalborg, Denmark, 1986. Paper No. 18.
- [153] SORENSEN, J. D. Reliability-based optimization of structural systems. Structural reliability theory, The Uni. of Aalborg, Aalborg, Denmark, 1987. Paper No. 32.
- [154] SORENSEN, J. D., AND ENEVOLDSEN, I. Sensitivity analysis in reliability-based shape optimization. In *NATO ASI* (Dordrecht, The Netherlands, 1992), B. H. V. Topping, Ed., vol. 221 of *E*, Kluwer Academic Publishers, pp. 617–638.
- [155] SORENSEN, J. D., AND ENEVOLDSEN, I. Sensitivity weaknesses in application of some statistical distributions in first order reliability methods. *Structural Safety* 12 (1993), 315–325.
- [156] SPANOS, P. D. Probabilistic methods in civil engineering. In *Proceedings 5th ASCE Specialty Conference on Probabilistic Mechanics and Structural Reliability* (Blacksburg, Virginia, May, 25–27 1988), P. D. Spanos, Ed., ASCE, New York.
- [157] STEWARD, M. G., AND MELCHERS, R. E. *Probabilistic Risk Assessment of Engineering Systems*. Chapman & Hall, London, 1997.
- [158] TANG, W. H., YÜCEMEN, M. S., AND ANG, A. H. S. Probability-based short term design of soil slopes. *Canadian Geotechnical Journal* 13, 3 (1976), 201–215.
- [159] THOFT-CHRISTENSEN, P. Reliability and optimization of structural systems. In *Proceedings of the first IFIP WG 7.5 Conference on Reliability and Optimization of Structural Systems* (Aalborg, Denmark, May 1987), vol. 33 of *Lecture Notes in Engineering*, Springer-Verlag, Berlin.
- [160] THOFT-CHRISTENSEN, P. Reliability and optimization of structural systems '88. In *Proceedings of the second IFIP WG 7.5 Conference on Reliability and Optimization of Structural Systems* (London, UK, September, 26–28 1988), vol. 48 of *Lecture Notes in Engineering*, Springer-Verlag, Berlin.

- [161] THOFT-CHRISTENSEN, P., AND ISHIKAWA, H. Reliability and optimization of structural systems '91. In *Proceedings of the fifth IFIP WG 7.5 Conference on Reliability and Optimization of Structural Systems* (Takamatsu-shi, Kagawa, Japan, March, 24–26 1993), Lecture Notes in Engineering, North-Holland, Amsterdam.
- [162] TVEDT, L. Two second-order approximations to the failure probability. Veritas rep. rdiv/20-004083, Der norske Veritas, Oslo, 1983.
- [163] TVEDT, L. Distribution of quadratic forms in normal space. *Journal of Engineering Mechanics* 116, 6 (1990), 1183–1197.
- [164] VANDERPLAATS, G.Ñ. *Numerical Optimization Techniques for Engineering Design*. McGraw-Hill, New York, 1984.
- [165] VENECIANO, D. Contributions to second moment reliability. Res. Rep. R74-33, Dep. of Civ. Engrg., Mass. Inst. of Technol., Mass, 1974.
- [166] VENMARCKE, E. H. Reliability of earth slopes. *Journal of Geotechnical Engineering Division, ASCE* 103, 11 (1997), 1227–1246.
- [167] VROUWENVELDER, T. The jcss probabilistic model code. *Structural Safety* 19, 3 (1997), 245–251.
- [168] VROUWENVELDER, T. *Reliability Based Code calibration. The use of the JCSS Probabilistic Model Code.*, march 21/22 ed. Joint Committee of Structural Safety Workshop on Code Calibration, Zurich, 2002.
- [169] WEN, Y.-K. Probabilistic mechanics and structural reliability. In *Proceedings 4th ASCE Specialty Conference on Probabilistic Mechanics and Structural Reliability* (Berkeley, California, January, 11–13 1984), Y.-K. Wen, Ed., ASCE, New York.
- [170] WIRSCHING, P. H., AND WU, Y. T. Advanced reliability methods for structural evaluation. *J. Engineering Mechanics Division, ASCE* 109, 2 (1987), 19–23.
- [171] WOLFE, P. Methods of nonlinear programming. In *Recent Advances in Mathematical Programming*, R. L. Graves and P. Wolfe, Eds. McGraw-Hill, New York, 1963, pp. 76–77.
- [172] WOLFF, T. F. *Analysis and design of embankment dam slopes: a probabilistic approach*. PhD thesis, Purdue University, West Lafayette, 1985.
- [173] WU, T. H., AND KRAFT, L. M. Safety analysis of slopes. *Journal of Soil Mechanics and Foundation Division, ASCE* 96, 2 (1970), 609–630.
- [174] WU, Y. T., BURNSIDE, O. H., AND CRUSE, T. A. Probabilistic methods for structural response analysis. in *W. K. Lam and T. Belytschko (eds.) Computational Mechanics of Probabilistic and Reliability Analysis* (1989), 181–196.
- [175] ZHANG, P. Nonparametric importance sampling. *Journal of the American Statistical Association* 91, 435 (1996), 1245–1253.

- [176] ZHAO, Y. G., AND ONO, T. A general procedure for first/order reliability method (form/sorm). *Structural Safety* 21 (1999), 95–112.

Índice alfabético

- Índice de fiabilidad, 16, 18, 28, 32, 33, 38, 39, 43, 57
 - de Hasofer-Lind, 29
 - invariante, 29
- Agente, 150
- Agentes, 160, 167, 186, 212, 231
- AIMMS, 100
- AMPL, 100
- Aplicaciones, 193
- Aproximación
 - polinomial, 58
- Aproximaciones
 - parabólicas, 56
 - segundo orden, 56
- Asintótica, 57
- Benders
 - corte de, 89
 - descomposición de, 88
- Código, 23, 58
 - calibración, 166, 231
- Códigos
 - calibración, 19
- Característico
 - coeficiente de seguridad, 17
 - valor, 17
- Casos especiales, 64
- Cholesky
 - descomposición de, 33
- Coefficiente
 - de relajación, 135
 - de seguridad, 128
- Coefficiente de seguridad
 - característico, 17
 - central, 17
 - de carga, 7
 - global, 4
 - parcial, 7
- Coeficientes
 - de seguridad, 151
 - mayoración, 8
 - minoración, 8
- Colas, el problema, 25
- Condición
 - de complementariedad, 63
 - de factibilidad dual, 63
 - de factibilidad primal, 63
- Condiciones
 - de optimalidad, 98
- Convolución
 - integral, 15, 25
- Correlación
 - matriz, 43
- Costes
 - directos, 59
 - mantenimiento, 59
 - reparación, 59
- Descomposición
 - de Cholesky, 33
 - de las Condiciones de Optimalidad, 98
 - técnicas de, 61
- Descomposición de Benders
 - algoritmo, 90
 - ejemplo, 91
- Diseño clásico
 - con coeficientes
 - de seguridad globales, 154
 - de seguridad parciales, 154
- Diseño general
 - global, 156
 - parcial, 156

- Diseño mixto
 - global, 155, 169, 173
 - parcial, 155, 166, 176
- Diseño moderno, 155
- DSO, 58, 153
- Dual
 - ejemplo, 84
 - en la forma estándar, 68
 - función, 76, 95
 - problema, 61, 67, 71, 76, 95
 - problema del carpintero, 73
- Dualidad, 61, 67
 - débil, 96
 - en programación no lineal, 76
 - teorema, 72
 - para problemas convexos, 83
- Ecuación
 - de verificación, 33, 151
- Ejemplo
 - Optimización probabilista de un dique de escollera, 157
- Estabilidad de taludes, 251
- Estado
 - de proyecto, 151
- Estado límite, 30
 - último, 4
 - ecuación de, 101
 - daño, 3
 - definición, 3
 - ecuación de, 5–7, 14, 19, 21, 23, 28–30, 33–36, 39, 42–45, 49, 51, 56, 59
 - parada operativa, 3
 - servicio, 3
- Estados límite, 151
- Fallo
 - dominio de, 26
- Fiabilidad, 25, 28, 58
 - del sistema, 56, 59
 - estructural, 23, 26
 - problemas, 37
- FORM, 24, 27, 40, 43, 59, 149, 179
 - algoritmo, 43
 - aplicación, 48
 - ejemplo, 43
- FOSM, 24, 29, 33, 39, 40, 43
- Función
 - característica, 57
 - objetivo, 63
- GAMS, 46, 53, 100, 139, 144, 183, 205, 242
- Gauss
 - eliminación, 105
 - pesos de, 123
 - puntos de, 123
- Gaussiano
 - espacio, 27
- Gradiente, 42, 58, 62, 77
 - proyectado, 37
 - reducido generalizado, 46, 100, 103
- Hasofer-Lind
 - algoritmo, 37
 - método de, 37
 - transformación de, 32
- Hessiano, 37, 56, 77
- Hipercubo
 - unitario, 109
- Hiperesfera, 111
- Hiperplanos
 - cortantes, 97
- Hiperplanos aproximantes
 - algoritmo, 140
 - ejemplo, 142
- Incertidumbre, 5, 13
- Invarianza, 29
 - ejemplo, 9
- Iribarren
 - número de, 159
- Jacobiano, 42–44, 52, 67
- Karush-Kuhn-Tucker, 104
 - condiciones de, 59, 62, 179
 - condiciones de optimalidad, 61
- Karush-Kuhn-Tucker
 - condiciones de optimalidad de, 144
- Lagrange
 - multiplicador, 31

- Lagrangiana
 - función, 31, 36, 66, 77, 94
 - relajación, 94
- Lagrangiano, 37
- Lema de dualidad débil, 72
- LINDO, 100
- Longuet-Higgins
 - distribución de, 50
- Método
 - combinado, 169
 - de Gauss Legendre, 121
 - de hiperplanos cortantes, 97
 - de la bisección, 112
 - de la región de confianza, 97
 - de la superficie de respuesta, 59
 - de los politopos, 116
 - de Newton, 66
 - de penalización, 97
 - de primer orden, 28
 - de relajación, 134
 - del gradiente proyectado, 101
 - del Gradiente Reducido Generalizado, 101
 - del gradiente reducido generalizado algoritmo, 104
 - del subgradiente, 96
- Método mixto
 - global, 185
- Métodos
 - de fiabilidad de primer orden, 40
 - de integración, 25
 - de simulación, 25
 - segundo orden, 56
- Maestro
 - problema, 61
- Margen
 - de seguridad, 151
- Marginal CDF
 - transformación de, 121
- Medida parcialmente probabilista
 - periodo de retorno, 11
- Medidas de fiabilidad, 3
- Medidas deterministas, 4
 - coeficiente de carga, 7
 - coeficiente de seguridad global, 4
 - coeficiente de seguridad parcial, 7
 - invarianza, 9
 - margen de seguridad, 10
- Medidas invariantes, 11
- Medidas probabilistas, 12
 - problema básico en fiabilidad, 13
 - problema genérico en fiabilidad, 19
- Modelo general, 177
 - global, 177
 - parcial, 179
- Modo de fallo, 151
- Monte Carlo, 25, 26
 - método de, 116
 - simulación, 217, 245
 - simulación de, 125
- MPL, 100
- Muro Vertical, 193
- Muro vertical, 194
- Newton
 - iteración de, 67
 - método de, 101
- Nivel 1, 23, 157
- Nivel 2, 23, 157
- Nivel 3, 23
- Nivel I, 194
- Nivel II, 194
- Nivel III, 194
- Obtención
 - el dual a partir del primal en su forma estándar, 68
- Obteniendo
 - el problema dual, 69
- Operatividad
 - accidental, 151
 - extrema, 151
 - normal, 151
- Optimización, 46
 - basada en fiabilidad, 58
 - determinista, 58
 - estocástica, 59
 - estructural, 58, 59
 - estructural basada en fiabilidad, 58

- estructural determinista, 58
 - paquete estándar, 48
 - paquetes de, 100
 - problema, 61
 - problemas, 58
- Ortogonal
 - transformación, 32
- Parámetro, 150
- Parámetros, 160, 167, 186, 212, 231
 - estadísticos, 150, 160, 167, 186, 212, 232
- Periodo de retorno
 - definición, 11
- Politopos, 109
- Precio sombra, 75
- Primal
 - problema, 61, 67–69, 76
- Probabilidad
 - de fallo nominal, 28
 - de fallo, 23, 28, 39, 109
 - de superación de estado límite, 39
- Probabilidad de fallo, 14, 15, 19, 22
 - algoritmo, 115, 124
- Problema
 - dual, 96
 - maestro, 89, 162
 - no restringido, 65
 - primal, 95, 96
 - primal descompuesto, 95
 - restringido con restricciones de desigualdad, 65
 - restringido con restricciones de igualdad, 65
- Programación lineal
 - ejemplo, 78
- PSFM, 87, 166, 197
- Punto
 - de diseño, 30, 32, 33, 35, 36, 38, 43, 53, 56, 58
 - de fallo, 30, 34
 - de máxima verosimilitud, 30
- punto
 - de diseño, 157
 - máxima verosimilitud, 157
- Raileigh, 50
- RBO, 24, 179
- RBSO, 58, 99, 153, 157, 165
- Región
 - de factibilidad, 63
 - de fallo, 4, 38, 109, 110
 - factible, 62, 64, 91
 - fallo, 21
 - segura, 4–6, 8
- región
 - fallo, 23
- Relajación
 - algoritmo, 135
 - ejemplo de, 136
 - Lagrangiana Aumentada, 98
- Restricción, 63
 - de complicación, 87, 94
- Restricciones, 62
 - de complicación, 140
- Rosenblatt
 - transformación de, 41, 43, 44, 51, 52, 101, 110, 115, 121, 157, 169, 170, 215, 241
- Símplices, 109, 113
- Sensibilidad, 27, 61, 75, 179
 - análisis de, 144
 - aplicación, 145
 - aplicación al PSFM, 180
 - parámetros, 37
 - variables duales, 84
- Simetría de la relación de dualidad, 67
- Simulación
 - de Monte Carlo, 210
 - direccional, 27
 - direccional ponderada, 27
 - Monte Carlo, 26
 - normal, 26
 - ponderada, 26
- Sistema
 - en paralelo, 59
 - en serie, 59
- SORM, 24, 27, 56, 149
- Subgradiente, 96
- Subproblema, 89

Subproblemas, 61

Taylor

desarrollo, 66

desarrollo en serie, 51

Teorema

dualidad débil, 72, 80

Teorema de la dualidad débil, 80

Transformación

de Hasofer-Lind, 32

de Rosenblatt, 41

lineal, 33

normal, 40

ortogonal, 32

Valor

característico, 150

esperado, 150

nominal, 150

Variable

de complicación, 87

de decisión, 101

de estado, 101

de holgura, 98

dependiente, 101

independiente, 101

no básica, 101

superbásica, 101

VARIABLES

de decisión, 62

de diseño, 231

auxiliares, 150, 160, 167, 213, 232

auxiliares , 186

de complicación, 161

de diseño, 150, 166, 185, 196, 212

dediseño, 160

no básicas, 150

superbásicas, 100

Vida útil, 59, 158

definición, 4

Viga Mixta, 210